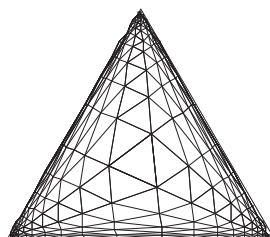

APPLICATION DE HODGE-TATE DUALE D'UN GROUPE DE LUBIN-TATE, IMMEUBLE DE BRUHAT-TITS DU GROUPE LINÉAIRE ET FILTRATIONS DE RAMIFICATION

par

Laurent Fargues



Résumé. — L'un des buts de cet article est de décrire l'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld au niveau de leurs squelettes après quotient par $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) \times \mathcal{O}_D^\times$ ou bien $I \times \mathcal{O}_D^\times$ où \mathcal{O}_D est l'ordre maximal dans l'algèbre à division d'invariant $\frac{1}{n}$ sur F et I un sous-groupe d'Iwahori de GL_n . Nous donnons des applications à l'étude des sous-groupes canoniques sur les espaces de Lubin-Tate, la description des orbites de Hecke sphériques dans ces espaces, les domaines fondamentaux pour les correspondances de Hecke et l'application des périodes de Gross-Hopkins. Nous-y étudions également en détail les filtrations de ramification (inférieure et supérieure) et l'application de Hodge-Tate d'un groupe formel p -divisible de dimension un.

Abstract. — One of the goals of this article is to describe the isomorphism between Lubin-Tate and Drinfeld towers at the level of their skeletons after taking quotient by $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) \times \mathcal{O}_D^\times$ or $I \times \mathcal{O}_D^\times$ where \mathcal{O}_D is the maximal order in the division algebra with invariant $\frac{1}{n}$ over F and I a Iwahori subgroup of GL_n . We give applications to the theory of canonical subgroups on Lubin-Tate spaces, the description of spherical Hecke orbits in those spaces, fundamental domains for Hecke correspondences and the Gross-Hopkins period mapping. We also study in details the ramification filtrations (upper and lower) and the Hodge-Tate map of a one dimensional formal p -divisible group.

Introduction

L'un des buts de cet article est de décrire l'isomorphisme entre les squelettes des tours de Lubin-Tate et de Drinfeld après quotient par $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) \times \mathcal{O}_D^\times$ ou bien $I \times \mathcal{O}_D^\times$ où \mathcal{O}_D est l'ordre maximal dans l'algèbre à division d'invariant $\frac{1}{n}$ et I un sous-groupe d'Iwahori de GL_n .

L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld au niveau des points ([7]) est un isomorphisme $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$ -équivariant en niveau infini

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{LT}_\infty & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{DR}_\infty \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{LT}_\infty / \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) = \mathbb{B}^{n-1} & & \mathcal{DR}_\infty / \mathcal{O}_D^\times = \Omega
 \end{array}$$

- Dans le premier chapitre nous donnons une formule pour la valuation p -adique des périodes de Hodge-Tate du dual de Cartier d'un groupe p -divisible formel sur un anneau de valuation (pas forcément discrète) pour une valuation de hauteur 1. En fait, nous considérons plus généralement le cas d'un \mathcal{O} -module formel π -divisible où \mathcal{O} est l'anneau des entiers d'une extension de degré fini de \mathbb{Q}_p . Dans ce cas la bonne notion de dualité remplaçant la dualité de Cartier est celle définie par Faltings ([4]). Le lecteur ne connaissant pas la théorie de [4] pourra supposer $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$.
- Dans le second chapitre on étudie la filtration donnée par la valuation sur les points de torsion d'un groupe formel π -divisible de dimension 1. Cette filtration fournit une famille de réseaux dans le module de Tate rationnel V_p . L'image dans l'immeuble de $\mathrm{PGL}(V_p)$ de cet ensemble est un ensemble fini de sommets. De plus les éléments de valuation suffisamment petite décrivent un simplexe S de cet immeuble. L'un des principaux résultats est que cet ensemble est contenu dans un appartement et peut être reconstruit géométriquement dans l'immeuble à partir du simplexe S et du sommet donné par le réseau $T_p \subset V_p$. Nous donnons également une description combinatoire du simplexe S à partir du polygone de Newton de la multiplication par π sur une loi de groupe formel associée.
- Le troisième chapitre est inspiré par les travaux d'Abbes-Saito et Abbes-Mokrane ([1]). La filtration sur les points de torsion étudiée dans le deuxième chapitre se comporte bien par restriction à un sous-groupe : si H est un groupe formel p -divisible de dimension 1 et $G_2 \subset G_1 \subset H$ des sous-groupes plats finis alors $\forall \lambda \{x \in G_1 \mid v(x) \geq \lambda\} \cap G_2 = \{x \in G_2 \mid v(x) \geq \lambda\}$. Par contre cette filtration dite de "ramification inférieure" ne se comporte pas bien par isogénies. C'est le cas de la filtration définie en toute généralités dans [1]. Dans le cas que nous étudions des sous-groupes plats finis d'un groupe formel p -divisible de dimension 1 l'algèbre de ces groupes est monogène et la filtration de ramification supérieure de [1] est obtenue par réindexation de la filtration de ramification inférieure via une fonction de Herbrand. Cela est expliqué dans l'appendice B. La terminologie "inférieure/supérieure" provient par analogie avec la théorie des groupes de ramification des groupes de Galois des corps locaux : les groupes de ramification inférieure se comportent bien par restriction à un sous-groupe de Galois tandis que ceux de ramification supérieure se comportent bien vis à vis d'un quotient. Nous étudions cette filtration de ramification supérieure ainsi que son image dans l'immeuble de la même façon que dans le chapitre deux.
- Dans le quatrième chapitre on étudie le point de la réalisation géométrique de l'immeuble défini par l'application de Hodge-Tate du dual d'un \mathcal{O} -module formel π -divisible de dimension un. Ce point est la classe d'équivalence de la norme sur le module de Tate rationnel donnée par la valuation de l'application de Hodge-Tate étudiée dans le premier chapitre. On donne des formules intégrales pour cette norme en fonction des filtrations étudiées aux chapitres 2 et 3. Cette formule est particulièrement simple lorsque formulée en termes de la filtration de ramification supérieure (proposition 4.10). L'un des principaux corollaires de ces formules est que ce point dans l'immeuble est contenu dans la réalisation géométrique $|S|$ du simplexe S défini au chapitre 2.
- Dans le chapitre 5 on définit et étudie une structure simpliciale sur le squelette de l'espace de Lubin-Tate sans niveau. Le bon objet n'est pas en fait ce squelette mais plutôt un quotient de celui-ci, l'espace des polygones de Newton. On décrit complètement une structure simpliciale sur cet espace des polygones de Newton ainsi que l'action de certains opérateurs de Hecke sur cet espace simplicial. La définition de cette structure simpliciale est inspirée des résultats des chapitres 2 et 4.
- Dans le chapitre 6 on montre que la bijection entre les points des tours de Lubin-Tate et de Drinfeld induit un isomorphisme entre l'espace des polygones de Newton muni de la structure simpliciale définie au chapitre 5 et le quotient de l'immeuble de PGL_n par un sous-groupe compact maximal.
- Le chapitre 7 est consacré aux applications de la structure simpliciale sur l'espace des polygones de Newton et de l'action des opérateurs de Hecke sur celle-ci. Certains raisonnements sur l'espace de Lubin-Tate s'interprètent naturellement sur un appartement de l'immeuble.

Par exemple on démontre que l'existence de sous-groupes canoniques en un sens généralisé est équivalent à ce que le point dans l'immeuble soit contenu dans un certain demi-appartement. Cela démontre par un simple raisonnement géométrique que le “bord” de l'espace de Lubin-Tate est recouvert par des ouverts admissibles sur lesquels il ya des sous-groupes canoniques puisque c'est le cas dans l'immeuble. L'application quotient par un sous-groupe canonique se comprend également très facilement sur l'immeuble, de même que l'action des correspondances de Hecke.

Couplé aux résultats des chapitres précédents cela donne une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de sous-groupes canoniques généralisés en termes de l'application de Hodge-Tate du groupe p -divisible formel de dimension 1, comme dans [1].

On généralise également le domaine fondamental de Gross-Hopkins grâce à cette étude sur l'immeuble : n'importe quel domaine fondamental polyédral dans le simplexe standard $\text{Convexe}(e_0, \dots, e_n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sous l'action du groupe des rotations engendrées par $e_0 \mapsto e_1, e_1 \mapsto e_2, \dots, e_n \mapsto e_0$ fournit un domaine fondamental pour l'action des correspondances de Hecke dans l'espace de Lubin-Tate.

- Dans le chapitre 8 on généralise les résultats précédents au cas de l'espace de Lubin-Tate avec structure de niveau Iwahori. Dans ce cas là l'espace est une couronne p -adique généralisée et son squelette un simplexe “ouvert”. On définit et étudie alors comme auparavant une structure simpliciale sur ce simplexe et montre que via l'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld ce simplexe ouvert est isomorphe au quotient de l'immeuble par un sous-groupe d'Iwahori. Enfin on peut comprendre facilement grâce à cette étude le morphisme de l'espace de Lubin-Tate avec niveau Iwahori vers celui sans niveau au niveau des squelettes. Ce chapitre ne contient aucune démonstration, les démonstrations étant semblables à celles du cas de l'espace de Lubin-Tate sans niveau elles sont laissées au lecteur.
- Enfin l'appendice A contient des rappels sur l'immeuble de Bruhat-Tits de PGL_n .

Cet article est indépendant de [5] et [6]. Seule la compréhension d'une partie de [7] peut être utile.

Enfin, certains des aspects de cet article apparaissent déjà dans les travaux de Yu [12]. Cet article peut donc être en quelques sortes considéré comme une suite de [12], suite qui permet de comprendre pourquoi les calculs effectués dans [12] font apparaître l'appartement d'un immeuble de Bruhat-Tits.

Remerciements : L'auteur tient à remercier Alain Genestier et Vincent Lafforgue pour de nombreuses discussions sur le sujet. C'est en particulier Alain Genestier qui a suggéré d'introduire le simplexe de la définition 2.5, simplexe qui a suggéré à l'auteur d'étudier plus en détails les filtrations de ramification. Ils ont également suggéré à l'auteur l'étude du cas Iwahori faite au chapitre 8.

1. Une formule pour la valuation p -adique de l'application de Hodge-Tate du dual d'un groupe de Lubin-Tate

Soit $F|\mathbb{Q}_p$ une extension de degré fini et $\mathcal{O} = \mathcal{O}_F$ son anneau des entiers. Soit $K|F$ un corps valué complet pour une valuation v à valeurs dans \mathbb{R} étendant celle de F . Soit H un \mathcal{O} -module formel de dimension 1 et de hauteur finie n sur \mathcal{O}_K .

Supposons d'abord que $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$. Le but de cette section est de donner une formule pour l'application composée

$$T_p(H^D) \xrightarrow{\alpha_{H^D}} \omega_H \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}} \simeq \mathcal{O}_{\widehat{K}} \xrightarrow{v} \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$$

où α_{H^D} est l'application de Hodge-Tate de H^D : si $x \in T_p(H^D)$, $x : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \longrightarrow H_{\mathcal{O}_{\widehat{K}}}^D$ et $x^D : H_{\mathcal{O}_{\widehat{K}}} \longrightarrow \mu_{p^\infty/\mathcal{O}_{\widehat{K}}}$ alors

$$\alpha_{H^D}(x) = (x^D)^* \frac{dT}{T}$$

Pour \mathcal{O} plus général que \mathbb{Z}_p nous donnons une formule pour la composée

$$T_p(H^\vee) \xrightarrow{\alpha_{H^\vee}^{\mathcal{O}}} \omega_H \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}} \simeq \mathcal{O}_{\widehat{K}} \xrightarrow{v} \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$$

où H^\vee est le dual strict au sens de Faltings ([4]). Si \mathcal{LT} désigne un groupe de Lubin-Tate de \mathcal{O} -hauteur 1 alors à $x \in T_p(H^\vee)$ est associé un morphisme $x^\vee : H_{\mathcal{O}_{\widehat{K}}} \longrightarrow \mathcal{LT}_{/\mathcal{O}_{\widehat{K}}}$ qui définit donc $\alpha_{H^\vee}^{\mathcal{O}}(x) = (x^\vee)^* \beta$ après choix d'un générateur β de $\omega_{\mathcal{LT}}$.

Il est clair que pour le problème auquel on s'intéresse on peut supposer que $K = \widehat{\widehat{K}}$, ce que nous ferons dans la suite.

1.1. Périodes de Hodge-Tate de certains schémas en groupes de type (p, \dots, p) . —

1.1.1. Le cas $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$. — Soit G un schéma en groupes fini localement libre d'ordre p sur une base affine $\text{Spec}(R)$ au dessus de $\text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$. D'après [11] ou plus généralement [9] il existe alors $\gamma, \delta \in R$ tels que $\gamma\delta = w$ où $w \in \mathbb{Z}_p$ est une constante universelle de valuation p -adique 1 tels que

$$\begin{aligned} G &\simeq \text{Spec}(R[T]/(T^p - \delta T)) \\ G^D &\simeq \text{Spec}(R[U]/(U^p - \gamma U)) \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \omega_G &\simeq R/\delta R.dT \\ \omega_{G^D} &\simeq R/\gamma R.dU \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \alpha_{G^D} : G^D &\longrightarrow \omega_G \\ u &\longmapsto (u \bmod \delta).dT \end{aligned}$$

Si $R = \mathcal{O}_K$ avec K comme précédemment alors $v(\gamma) + v(\delta) = 1$ et

$$\forall u \in G^D(\mathcal{O}_K) \quad v(u) = \frac{v(\gamma)}{p-1}$$

et donc on connaît le sous-module $\mathcal{O}_K \cdot \text{Im } \alpha_{G^D}$ de ω_{G^D} dès que l'on connaît $v(\text{Ann } \omega_G) = v(\delta)$ ou bien $v(\text{Ann } \omega_{G^D}) = v(\gamma)$.

1.1.2. Le cas \mathcal{O} général. — Soit π une uniformisante de \mathcal{O} et $q = p^r$ le cardinal de son corps résiduel. On note v la valuation normalisée de F .

Soit R une \mathcal{O} -algèbre. Soit G un schéma en groupes fini et localement libre sur $\text{Spec}(R)$. Supposons le muni d'une action de $\mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$ et de type (p, \dots, p) relativement à cette action. L'anneau R étant une \mathcal{O} -algèbre il y a un caractère

$$\chi : (\mathcal{O}/\pi\mathcal{O})^\times \xrightarrow{\text{Teichmüller}} \mathcal{O}^\times \longrightarrow R^\times$$

Alors, d'après [9] il existe $(\gamma_i, \delta_i)_{i \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}} \in R^{\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}}$ tels que $\gamma_i \delta_i = w \in \mathbb{Z}_p$ est de valuation p -adique 1, localement sur $\text{Spec}(R)$ $G \simeq \text{Spec}(A)$ avec

$$A = R[T_i]_{i \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}} / (T_i^p - \delta_i T_{i+1})$$

et l'action de $(\mathcal{O}/\pi\mathcal{O})^\times$ sur A induite par l'action de $\mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$ sur G se fasse sur T_i à travers le caractère χ^{p^i} . On a alors

$$\omega_G \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}} R/\delta_{i-1} R.dT_i$$

Supposons maintenant de plus que l'action de \mathcal{O} sur ω_G soit l'action naturelle induite par la structure de \mathcal{O} -algèbre de R . Alors,

$$\forall i \neq r-1 \quad \delta_i \in R^\times$$

et donc, si

$$\delta = \delta_0^{p^{r-1}} \delta_1^{p^{r-2}} \dots \delta_{r-2}^p \delta_{r-1}$$

on a

$$A \simeq R[T]/(T^q - \delta T)$$

Le complexe de co-Lie de G s'identifie alors à

$$l_G \simeq [R \xrightarrow{\times \delta} R]$$

Supposons maintenant que G est muni d'une action stricte de \mathcal{O} au sens de [4] relevant l'action de $\mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$ sur G . D'après [4] l'ensemble de ces relèvements est un tore sous $H^{-1}(\text{End}(l_G)) \simeq \text{Ann}_R(\delta)$. Supposons maintenant que R est sans p -torsion. Cela implique $\text{Ann}_R(\delta) = (0)$. D'après ce qui précède il existe donc une unique telle \mathcal{O} -action stricte : c'est celle définie dans le chapitre 3 de [4] sur le groupe noté $G_{u,v}$. On a donc identifié G muni de son action stricte de \mathcal{O} et d'après le chapitre 3 de [4] le dual strict d'un tel groupe est connu. Rappelons en effet qu'alors il existe $\gamma \in R$ tel que $\gamma\delta = w' \in \mathcal{O}$ où w' est une uniformisante de F et que le dual stricte s'identifie à

$$G^\vee \simeq \text{Spec}(R[U]/(U^q - \gamma U))$$

Soit \mathcal{LT} un groupe formel de Lubin-Tate de \mathcal{O} -hauteur 1. Alors, d'après [4], pour un choix de coordonnée formelle V sur \mathcal{LT} l'accouplement

$$G \times G^\vee \longrightarrow \mathcal{LT}[\pi]$$

est donnée par

$$V \longmapsto T \otimes U$$

Soit alors

$$\alpha_{G^\vee}^{\mathcal{O}} : G^\vee \longrightarrow \omega_G$$

l'application de Hodge-Tate relative à \mathcal{O} . Avec l'identification

$$\omega_G \simeq R/\delta R.dT$$

cette application s'identifie donc à

$$u \longmapsto (u \bmod \delta).dT$$

Lorsque $R = \mathcal{O}_K$ avec K comme précédemment on en déduit que l'on connaît $\mathcal{O}_K.\text{Im}\alpha_{G^\vee}^{\mathcal{O}}$ dès que l'on connaît $v(\text{Ann } \omega_G) = v(\delta)$ ou bien $v(\text{Ann } \omega_{G^\vee}) = v(\delta)$.

1.2. Calcul de la valuation p -adique de $\alpha_{H^\vee}^{\mathcal{O}}(x)$. —

1.2.1. Notations. — Soit H un \mathcal{O} -module π -divisible formel de dimension 1 et de \mathcal{O} -hauteur n sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_K)$. Supposons également que sa fibre spéciale est formelle. Nous allons calculer $v(\alpha_{H^\vee}^{\mathcal{O}}(x))$ pour $x \in T_p(H^D)$. Nous noterons \widehat{H} le groupe formel associé sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_K)$. Alors $H(\mathcal{O}_K) = \bigcup_{k \geq 1} H[\pi^k](\mathcal{O}_K) \subset \widehat{H}(\mathcal{O}_K)$. Il y a une “valuation”

$$v : \widehat{H}(\mathcal{O}_K) \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$$

qui définit une filtration dite de ramification inférieure sur $\widehat{H}(\mathcal{O}_K)$ et donc sur les points de torsion (cf. section 2). Cette “valuation” est définie de la façon suivante : fixons un isomorphisme de $\text{Spf}(\mathcal{O}_K)$ -schémas formels pointés

$$\widehat{H} \xrightarrow{\sim} \text{Spf}(\mathcal{O}_K[[T]])$$

où \widehat{H} est pointé par sa section unité et $\text{Spf}(\mathcal{O}_K[[T]])$ par la section $T = 0$. Cet isomorphisme induit une bijection $\widehat{H}(\mathcal{O}_K) \simeq \{x \in \mathcal{O}_K \mid v(x) > 0\}$. Si via cette bijection $y \in \widehat{H}(\mathcal{O}_K)$ correspond à $x \in \mathcal{O}_K$ on pose alors $v(y) = v(x)$. On vérifie aussitôt que cette définition ne dépend pas de l'isomorphisme de schémas formels pointés choisi.

On utilisera systématiquement le jeu entre la fibre générique et les modèles entiers en écrivant pour G un groupe fini localement libre sur \mathcal{O}_K

$$G(\mathcal{O}_K) = G(K)$$

et

$$T_p(H) = \varprojlim_k H[\pi^k](K) = \varprojlim_k H[\pi^k](\mathcal{O}_K)$$

Étant donné que K est algébriquement clos on considérera toujours les fibres génériques des groupes finis sur \mathcal{O}_K comme des groupes abstraits.

Soit G un groupe p -divisible sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_K)$ et D un sous-groupe fini de la fibre générique de G . On notera D^{adh} l'adhérence schématique de D dans $G[p^k]$ pour $k \gg 0$ (et cela ne dépend pas de k). Dans la suite il n'y aura jamais d'ambiguïté pour un D donné sur le groupe G dans lequel on prend l'adhérence schématique, c'est pourquoi G n'intervient pas dans la notation.

1.2.2. Premiers calculs. — Pour G un groupe fini localement libre muni d'une action stricte de \mathcal{O} le morphisme de faisceaux fppf $\alpha_{G^\vee}^\mathcal{O} : G^\vee \rightarrow \omega_G$ est naturel en G , tout morphisme strict $f : G_1 \rightarrow G_2$ induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} G_2^\vee & \xrightarrow{\alpha_{G_2^\vee}^\mathcal{O}} & \omega_{G_2} \\ \downarrow f^\vee & & \downarrow \\ G_1^\vee & \xrightarrow{\alpha_{G_1^\vee}^\mathcal{O}} & \omega_{G_1} \end{array}$$

En particulier $\forall k \in \mathbb{N}^*$ l'inclusion $H[\pi^k] \hookrightarrow H[\pi^{k+1}]$ induit un diagramme commutatif de morphismes de schémas en groupes

$$\begin{array}{ccccc} H^\vee[\pi^{k+1}] & \xrightarrow{\alpha_{H^\vee[\pi^{k+1}]}^\mathcal{O}} & \omega_{H[\pi^{k+1}]} & \xleftarrow{\sim} & \omega_H/\pi^{k+1}\omega_H \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^\vee[\pi^k] & \xrightarrow{\alpha_{H^\vee[\pi^k]}^\mathcal{O}} & \omega_{H[\pi^k]} & \xleftarrow{\sim} & \omega_H/\pi^k\omega_H \end{array}$$

et un diagramme de morphismes de groupes

$$\begin{array}{ccc} T_p(H^\vee) & \xrightarrow{\alpha_{H^\vee}^\mathcal{O}} & \omega_H \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_p(H^\vee)/\pi^k T_p(H^\vee) & \longrightarrow & \omega_H/\pi^k \omega_H \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ H[\pi^k]^\vee(\mathcal{O}_K) & \xrightarrow{\alpha_{H[\pi^k]^\vee}^\mathcal{O}} & \omega_{H[\pi^k]} \end{array}$$

où $T_p(H^\vee)$ est le groupe des $(x_k)_{k \geq 1}$, $x_k \in H[\pi^k]^\vee(K) = H[\pi^k]^\vee(\mathcal{O}_K)$, $\pi x_{k+1} = x_k$. Ainsi si $x = (x_k)_{k \geq 1}$ pour calculer $\alpha_{H^\vee}^\mathcal{O}(x)$ il suffit de calculer $\alpha_{H[\pi^k]^\vee}^\mathcal{O}(x_k)$ pour tout k qui s'identifie à $\alpha_{H^\vee}^\mathcal{O}(x) \bmod \pi^k$.

Soit donc $x \in T_p(H^\vee)$ dont on veut calculer $v(\alpha_{H^\vee}^\mathcal{O}(x))$. On peut supposer que $x \notin \pi T_p(H^\vee)$ c'est à dire que le morphisme associé $T_p(H) \rightarrow \mathcal{O}_F(1)$ est surjectif où $F(1)$ désigne le caractère de Lubin-Tate. On fera donc cette hypothèse. On constate que la valuation de $\alpha_{H^\vee}^\mathcal{O}(x)$ ne dépend que du sous-module engendré $\mathcal{O}.x \subset T_p(H^\vee)$ qui est facteur direct dans $T_p(H^\vee)$. Via la dualité parfaite

$$T_p(H) \times T_p(H^\vee) \rightarrow \mathcal{O}_F(1)$$

de tels sous-modules correspondent aux sous- \mathcal{O} -modules $M \subset T_p(H)$ facteur direct de rang $n-1$, $M = (\mathcal{O}.x)^\perp$.

Cela reste valable modulo π^k . Si $x \in H[\pi^k]^\vee(K) \setminus H[\pi^{k-1}]^\vee(K)$, modulo une unité $\alpha_{H[\pi^k]^\vee}(x)$ ne dépend que du sous-module engendré $C = \langle x \rangle$ et de tels sous-modules sont en bijection avec les sous-modules $C^\perp \subset H[\pi^k](K)$ facteurs directs de rang $n-1$ sur $\mathcal{O}/\pi^k \mathcal{O}$.

Lemme 1.1. — *L'opération d'adhérence schématique commute à la dualité de Cartier-Faltings : si $C \subset H[\pi^k]^\vee(K)$ est un sous-groupe alors*

$$(C^{adh})^\vee \simeq H[\pi^k]/(C^\perp)^{adh}$$

Démonstration. De la suite exacte

$$0 \longrightarrow C^{adh} \longrightarrow H[\pi^k]^\vee \longrightarrow H[\pi^k]^\vee/C^{adh} \longrightarrow 0$$

on déduit d'après le théorème 8 de [4] la suite exacte

$$0 \longrightarrow (H[\pi^k]^\vee/C^{adh})^\vee \longrightarrow H[\pi^k] \longrightarrow (C^{adh})^\vee \longrightarrow 0$$

Le sous-groupe fini localement libre de gauche coïncide en fibre générique avec C^\perp . Il est donc égal à $(C^\perp)^{adh}$. \square

Proposition 1.2. — *Soit $D \subset H$ un sous-groupe fini localement libre sur \mathcal{O}_K . Alors $\omega_D \simeq \mathcal{O}_K/\gamma \mathcal{O}_K$ où*

$$v(\gamma) = \sum_{\lambda \in D \setminus 0} v(\lambda)$$

Le complexe de co-Lie de D est isomorphe au complexe

$$\left[\mathcal{O}_K \xrightarrow{\gamma} \mathcal{O}_K \right]$$

Démonstration. Avec un choix de bonnes “coordonnées formelles” (on entend par là un isomorphisme de schémas formels pointés entre \hat{H} et $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K[[T]])$) à la source et au but l'isogénie de groupes formels

$$\hat{H} \longrightarrow \hat{H}/C$$

s'écrit $T \prod_{x \in D \setminus \{0\}} (T - x)$. \square

Remarque 1.3. — Dans cette dernière proposition l'assertion concernant la valuation de γ est l'analogie de la proposition 4 du chapitre IV de [10] reliant valuation de la différentielle et les groupes de ramifications inférieurs d'une extension de corps locaux.

Corollaire 1.4. — *Soient $D_1 \subset D_2$ des groupes fini localement libres sur \mathcal{O}_K sous-groupes de H . Alors la suite*

$$0 \longrightarrow \omega_{D_2/D_1} \longrightarrow \omega_{D_2} \longrightarrow \omega_{D_1} \longrightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration. D'après la proposition précédente le groupe de cohomologie H^{-1} du complexe de co-Lie de nos groupes est nul puisque \mathcal{O}_K est sans p -torsion. \square

Soit donc maintenant $C = \mathcal{O}.y \subset H[\pi^k]^\vee(K)$ facteur direct de rang 1 et notons $C^\perp \subset H[\pi^k](K)$ son orthogonal. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} C^{adh} & \xrightarrow{\alpha_1 = \alpha_{C^{adh}}^\mathcal{O}} & \omega_{(C^{adh})^\vee} & \xrightarrow{\quad} & \omega_H/\pi^k \omega_H \\ \downarrow q_1 & & \downarrow q_2 & & \\ C^{adh}/C[\pi^{k-1}]^{adh} & \xrightarrow{\alpha_2} & \omega_{(C^{adh}/C[\pi^{k-1}]^{adh})^\vee} & & \end{array}$$

L'isomorphisme $(C^{adh})^\vee \simeq H[\pi^k]/(C^\perp)^{adh}$ implique que si $\omega_{(C^{adh})^\vee} \simeq \mathcal{O}_K/\gamma \mathcal{O}_K$ alors

$$v(\gamma) = k - \sum_{z \in C^\perp \setminus \{0\}} v(z)$$

De même si $\omega_{(C[\pi^{k-1}]^{adh})^\vee} \simeq \mathcal{O}_K/\gamma'\mathcal{O}_K$ alors

$$v(\gamma') = k - 1 - \sum_{z \in C^\perp[\pi^{k-1}] \setminus \{0\}} v(z)$$

Soit maintenant γ'' tel que $\omega_{(C^{adh}/C[\pi^{k-1}]^{adh})^\vee} \simeq \mathcal{O}_K/\gamma''\mathcal{O}_K$. On déduit donc du corollaire 1.4 que

$$v(\gamma'') = 1 - \sum_{z \in C^\perp \setminus C^\perp[\pi^{k-1}]} v(z)$$

Nous allons maintenant utiliser les résultats de la section 1.2. Le groupe $C^{adh}/C[\pi^{k-1}]^{adh}$ est de type (p, \dots, p) et sont dual strict vérifie les hypothèses de la section 1.2. Avec les notations du diagramme précédent, $q_1(x)$ engendre les points à valeurs dans K de ce groupe comme $\mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$ -module. On en déduit que $\alpha_2(q_1(x)) = \beta \bmod \gamma''\mathcal{O}_K$ où

$$v(\beta) = \frac{\sum_{z \in C^\perp \setminus C^\perp[\pi^{k-1}]} v(z)}{q - 1}$$

et donc, si

$$v(\beta) < v(\gamma'')$$

c'est à dire si

$$\sum_{z \in C^\perp \setminus C^\perp[\pi^{k-1}]} v(z) < 1 - \frac{1}{q}$$

alors $\alpha_1(y) \neq 0 \in \mathcal{O}_K/\gamma\mathcal{O}_K$ et

$$v(\alpha_1(y)) = \frac{\sum_{z \in C^\perp \setminus C^\perp[\pi^{k-1}]} v(z)}{q - 1}$$

Si maintenant notre élément $y \in H[\pi^k]^\vee(K)$ provient d'un $x \in T_p(H^\vee) \setminus \pi T_p(H^\vee)$, puisque $\omega_{(C^{adh})^D} \hookrightarrow \omega_H/\pi^k\omega_H$ est une injection on a

$$\begin{aligned} v(\alpha_{H^\vee}^\mathcal{O}(x)) &= \frac{\sum_{z \in C^\perp \setminus C^\perp[\pi^{k-1}]} v(z)}{q - 1} + k - v(\gamma) \\ &= \frac{\sum_{z \in C^\perp \setminus C^\perp[\pi^{k-1}]} v(z)}{q - 1} + \sum_{z \in C^\perp \setminus \{0\}} v(z) \end{aligned}$$

Définition 1.5. — Soit A un ensemble de points de torsion de H . On note

$$v(A) = \sum_{z \in A \setminus \{0\}} v(z)$$

Résumons ce que nous avons démontré jusqu'à maintenant.

Proposition 1.6. — Soit $x \in T_p(H^\vee) \setminus \pi T_p(H^\vee)$ et $M = (\mathcal{O}.x)^\perp \subset T_p(H)$ facteur direct de rang $n - 1$. Notons pour tout entier $k \geq 1$ $M[\pi^k]$ le sous-groupe des points de π^k -torsion associé dans $H[\pi^k](K)$. Si l'entier k est tel que

$$v(M[\pi^k] \setminus M[\pi^{k-1}]) < 1 - \frac{1}{q}$$

alors

$$\begin{aligned} v(\alpha_{H^\vee}^\mathcal{O}(x)) &= \frac{v(M[\pi^k] \setminus M[\pi^{k-1}])}{q - 1} + v(M[\pi^k]) \\ &= \frac{1}{q - 1} (qv(M[\pi^k]) - v(M[\pi^{k-1}])) \end{aligned}$$

Reste à voir qu'il existe un tel entier k , ce que nous allons faire.

1.3. La formule finale. — Rappelons maintenant ([8], [5] chapitre 1) qu'il existe une loi de groupe formelle associée à H telle que le polygone de Newton de la multiplication par π sur cette loi soit l'enveloppe convexe des points

$$(0, \infty), (1, 1), (v(x_1), q), \dots, (v(x_i), q^i), \dots, (v(x_{n-1}), q^{n-1}), (0, q^n)$$

où $x_1, \dots, x_{n-1} \in K$ et $\forall i \ v(x_i) > 0$ (cf. figure 1.3). Rappelons également la recette suivante : si $y \in \widehat{H}(\mathcal{O}_K)$ la valuation des points s'envoyant sur y par la multiplication par π sur $\widehat{H}(\mathcal{O}_K)$ s'obtient en prenant l'enveloppe convexe du polygone précédent et du point $(0, v(y))$.

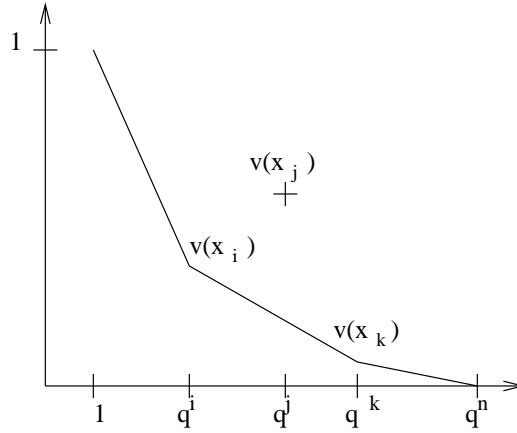


FIGURE 2. Le polygone de Newton de la multiplication par π

Lemme 1.7. — On a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{z \in H[\pi^k] \setminus H[\pi^{k-1}]} v(z) = 0$$

Démonstration. Remarquant que

$$H[\pi^{k+1}] \setminus H[\pi^k] = \{ y \in \widehat{H}(\mathcal{O}_K) \mid \pi y \in H[\pi^k] \setminus H[\pi^{k-1}] \}$$

on en déduit facilement le résultat en utilisant les rappels précédents sur le polygone de Newton. \square

Ainsi les valuations des points de torsion de $\widehat{H}(\mathcal{O}_K)$ forment un ensemble discret dans $]0, +\infty[$ s'accumulant en 0.

Proposition 1.8. — Soit $M \subset T_p(H)$ un sous- \mathcal{O} -module facteur direct de rang $n - 1$. Alors,

$$\text{pour } k \gg 0 \quad \forall y \in M[\pi^k] \setminus M[\pi^{k-1}] \quad \forall z \in H[\pi](K) \quad \frac{v(y)}{q^n} \leq v(z)$$

De plus si k est un entier vérifiant cette condition alors

$$v(M[\pi^{k+1}] \setminus M[\pi^k]) = \frac{1}{q} v(M[\pi^k] \setminus M[\pi^{k-1}])$$

Démonstration. La première assertion résulte du lemme précédent. Quant à la seconde, il y a une application surjective

$$\text{multiplication par } \pi : M[\pi^{k+1}] \setminus M[\pi^k] \twoheadrightarrow M[\pi^k] \setminus M[\pi^{k-1}]$$

et si k vérifie la condition énoncée alors d'après les rappels sur le polygone de Newton de la multiplication par π

$$\forall z \in H[\pi^{k+1}] \setminus H[\pi^k] \quad v(z) = \frac{1}{q^n} v(\pi.z)$$

Remarquant que par l'application multiplication par π précédente un élément a q^{n-1} antécédents on en déduit le résultat. \square

Corollaire 1.9. — La condition de la proposition 1.6 est toujours vérifiée pour $k \gg 0$. La fonction

$$k \mapsto \frac{1}{q-1} (qv(M[\pi^k]) - v(M[\pi^{k-1}]))$$

est constante dès que $k \geq k_0$ où k_0 est tel que $\forall y \in M[\pi^{k_0}] \setminus M[\pi^{k_0-1}] \forall z \in H[\pi] v(y) \leq q^n v(z)$. Elle fournit donc une formule pour la valuation de $\alpha_{H^\vee}^\mathcal{O}(x)$ lorsque k vérifie cette condition.

Lemme 1.10. — Soit $M \subset T_p(H)$ facteur direct de rang $n-1$. Soit $M \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \subset H(\mathcal{O}_K)$ l'ensemble des points de torsion associé. Alors la fonction

$$k \mapsto \frac{1}{q-1} (qv(M[\pi^k]) - v(M[\pi^{k-1}]))$$

est égale à $v(M \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ pour $k \gg 0$.

Démonstration. Soit k_0 un entier comme dans le corollaire précédent.

$$\begin{aligned} v(M \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) &= v(M[\pi^{k_0}]) + \sum_{k \geq k_0+1} v(M[\pi^k] \setminus M[\pi^{k-1}]) \\ &= v(M[\pi^{k_0}]) + \sum_{k \geq k_0+1} (v(M[\pi^k]) - v(M[\pi^{k-1}])) \\ &= v(M[\pi^{k_0}]) + (v(M[\pi^{k_0+1}]) - v(M[\pi^{k_0}])) \sum_{i \geq 0} q^{-i} \\ &= \frac{1}{q-1} (pv(M[\pi^{k_0+1}]) - v(M[\pi^{k_0}])) \end{aligned}$$

□

Résumons tous les résultats obtenus dans le théorème suivant.

Théorème 1.11. — Soit $x \in T_p(H^\vee)$ non-nul et notons $\varphi : H \rightarrow \mathcal{LT}$ le morphisme associé. Alors

$$v(\alpha_{H^\vee}^\mathcal{O}(x)) = \sum_{z \in \ker \varphi|_{H[p^\infty](K) \setminus \{0\}}} v(z)$$

Il existe de plus un entier k_0 tel que

$$\forall y \in \ker \varphi[\pi^{k_0}](K) \setminus \ker \varphi[\pi^{k_0-1}](K) \quad \forall y \in \ker \varphi[\pi](K) \quad v(y) \geq q^n v(z)$$

Alors, si $k \geq k_0$

$$v(\alpha_{H^\vee}^\mathcal{O}(x)) = \frac{1}{q-1} (qv(\ker \varphi[\pi^k]) - v(\ker \varphi[\pi^{k-1}]))$$

Démonstration. Il existe un entier $k \geq 0$ tel que $x \in \pi^k T_p(H^\vee) \setminus \pi^{k+1} T_p(H^\vee)$. Quitte à considérer la factorisation

$$\varphi : H \twoheadrightarrow H/H[\pi^k] \rightarrow \mathcal{LT}$$

on peut se ramener au cas où $x \notin \pi T_p(H^\vee)$ étudié précédemment. En effet, si C est un sous-groupe fini de H contenant $H[\pi^k]$ alors d'après la proposition 1.2 et le corollaire 1.4

$$\sum_{x \in C \setminus \{0\}} v(x) = k + \sum_{x \in (C/H[\pi^k]) \setminus \{0\}} v(x)$$

où $C/H[\pi^k] \subset H/H[\pi^k]$ et la fonction valuation sur $C/H[\pi^k]$ est celle déduite de la fonction valuation sur le \mathcal{O} -module formel $H/H[\pi^k]$. □

Remarque 1.12. — Soit $f : \hat{H}_1 \rightarrow \hat{H}_2$ une isogénie de groupes formels de dimension 1 sur \mathcal{O}_K . Après choix d'isomorphismes de schémas formels pointés $\hat{H}_1 \simeq \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K[[T]])$, resp. $\hat{H}_2 \simeq \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K[[T]])$, d'après le théorème de factorisation de Weierstrass

$$f^*T = \prod_{y \in \ker f} (T - y) \times u$$

où $u \in \mathcal{O}_K[[T]]^\times$. Alors, l'application induite $f^* : \omega_{H_2} \longrightarrow \omega_{H_1}$ s'identifie à

$$\mathcal{O}_K \xrightarrow{\times f'(0)=u(0) \prod_{y \in \ker f \setminus \{0\}} y} \mathcal{O}_K$$

et $v(f'(0)) = \sum_{y \in \ker f \setminus \{0\}} v(y)$. Pour un $\varphi : H \longrightarrow \mathcal{LT}$ comme dans le théorème précédent, si $n > 1$, après un choix d'isomorphismes $\widehat{H} \simeq \text{Spf}(\mathcal{O}_K[[T]])$, $\widehat{\mathcal{LT}} \simeq \text{Spf}(\mathcal{O}_K[[T]])$, $\varphi^*T \in \mathcal{O}_K[[T]]$ ne vérifie pas les conditions du théorème de factorisation de Weierstrass. Mais la formule donnée dans le théorème précédent dit que pour $v((\varphi^*T)'(0))$ tout se passe comme si

$$\varphi^*T = \prod_{y \in \ker \varphi \setminus \{0\}} (T - y) \times \text{unité}$$

bien que ce produit infini n'ait pas de sens. Plus précisément, pour tout entier $k \geq 1$ on peut factoriser

$$\varphi^*T = \prod_{y \in \ker \varphi[\pi^k] \setminus \{0\}} (T - y) \times g_k(T)$$

où $g_k(0) \notin \mathcal{O}_K^\times$ ce qui exprime le fait que le noyau du morphisme $\varphi|_{H[\pi^k]} : H[\pi^k] \longrightarrow \mathcal{LT}[\pi^k]$ n'est pas plat. Néanmoins le théorème précédent est équivalent à ce que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} v(g_k(0)) = 0$$

L'auteur de cet article a essayé de trouver une démonstration du théorème précédent sous la forme que l'on vient de donner à partir de manipulations élémentaires sur les séries formelles mais n'a pas réussi. Bien sûr les considérations précédentes montrent tout de même que $v(\alpha_{H^\vee}^\mathcal{O}(x)) \geq \sum_{y \in \ker \varphi \setminus \{0\}} v(y)$.

2. Filtration de ramification inférieure

Soit $K|F$ un corps valué complet pour une valuation v à valeurs dans \mathbb{R} étendant celle de F . On supposera comme dans le chapitre précédent que $K = \widehat{\widehat{K}}$.

Soit H un \mathcal{O} -module π -divisible de dimension 1 et de \mathcal{O} -hauteur n sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_K)$ dont la fibre spéciale est formelle.

2.1. Définition et premières propriétés. — Posons $V = V_p(H)$, un F -espace vectoriel de dimension n . On a l'identification

$$V_p(H) = \{ (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mid x_i \in \widehat{H}(\mathcal{O}_K) \text{ } \pi x_{i+1} = x_i \text{ et } x_i = 0 \text{ pour } i < 0 \}$$

Avec cette identification soit

$$\begin{aligned} v : V &\longrightarrow]0, +\infty] \\ (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} &\longmapsto v(x_0) \end{aligned}$$

Via l'identification $V_p(H) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p = H(\mathcal{O}_K)$ cette "valuation" v s'écrit aussi comme l'application composée

$$V_p(H) \longrightarrow V_p(H) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p = H(\mathcal{O}_K) \subset \widehat{H}(\mathcal{O}_K) \xrightarrow{v}]0, +\infty]$$

Elle vérifie

- $\forall x, y \in V \quad v(x+y) \geq \inf\{v(x), v(y)\}$
- $\forall a \in \mathcal{O} \quad \forall x \in V \quad v(ax) \geq v(x) \text{ et } v(\pi x) > v(x)$
- $\forall x \in V \quad v(\pi^k x) = +\infty \text{ pour } k \gg 0$
et $v(\pi^{k-1}x) = \frac{1}{q^n} v(\pi^k x) \text{ pour } k < 0$

Définition 2.1. — Pour tout $\lambda \in]0, +\infty]$ posons

$$\text{Fil}_\lambda V = \{ x \in V \mid v(x) \geq \lambda \}$$

qui définit donc une filtration décroissante de V .

- Il résulte des propriétés énoncées de v que les $\text{Fil}_\lambda V$ sont des sous- \mathcal{O} -modules. De plus
- D'après le lemme 1.7 les $\text{Fil}_\lambda V$ sont des réseaux dans V

- $\text{Fil}_\infty V = T_p(H)$
- Pour $\lambda \geq \frac{1}{q-1}$ $\text{Fil}_\lambda V = \text{Fil}_\infty V$
- $\exists \epsilon > 0$ tel que $\forall 0 < \lambda \leq \epsilon$ $\pi^{-1}\text{Fil}_\lambda = \text{Fil}_{\frac{\lambda}{q^r}}$

La filtration est donc entièrement déterminée par un nombre fini de réseaux, les autres étant déterminés par périodicité. Ses sauts forment un ensemble discret s'accumulant en 0 dans $\mathbb{R}_{>0}$. Plus précisément, elle a la forme suivante

$$\text{Fil}_{\lambda_1} \subsetneq \cdots \subsetneq \text{Fil}_{\lambda_r} \subsetneq \text{Fil}_{\lambda_{r+1}} \subsetneq \cdots \subsetneq \text{Fil}_{\lambda_{r+t}} \subsetneq \pi^{-1}\text{Fil}_{\lambda_{r+1}} \subsetneq \cdots \subsetneq \pi^{-1}\text{Fil}_{\lambda_{r+t}} \subsetneq \pi^{-2}\text{Fil}_{\lambda_{r+1}} \subsetneq \cdots$$

où $\lambda_1 > \cdots > \lambda_r > \lambda_{r+1} > \cdots > \lambda_{r+t}$.

La “valuation” v sur V donne lieu à une “valuation”

$$v : V/\text{Fil}_\infty \longrightarrow]0, +\infty]$$

Pour tout entier $k \geq 1$ il y a un isomorphisme naturel

$$\pi^{-k}\text{Fil}_\infty/\text{Fil}_\infty \xrightarrow{\sim} H[\pi^k](\mathcal{O}_K)$$

et via cet isomorphisme la “valuation” n’est rien d’autre que la valuation sur les points de π^k -torsion. Ainsi

$$\forall k \geq 1 \quad (\text{Fil}_\lambda \cap \pi^{-k}\text{Fil}_\infty) / \text{Fil}_\infty \xrightarrow{\sim} \{ x \in H[\pi^k](\mathcal{O}_K) \mid v(x) \geq \lambda \}$$

$$\text{Fil}_\lambda / \text{Fil}_\infty = \{ x \in H(\mathcal{O}_K) \mid v(x) \geq \lambda \}$$

Notons enfin deux propriétés cruciales qui n’ont pas encore été énoncées de la “valuation” v sur $V/\text{Fil}_\infty V$:

$$(*) \quad \forall x \in V/\text{Fil}_\infty V \quad \{v(y) \mid y \in V/\text{Fil}_\infty V \text{ } \pi y = x\} \text{ ne dépend que de } v(x)$$

$$(**) \quad \forall x, x' \in V/\text{Fil}_\infty V \quad v(x) \leq v(x') \implies \sup\{v(y) \mid \pi y = x\} \leq \sup\{v(y') \mid \pi y' = x'\}$$

Celles-ci résultent des rappels faits au début de la section 1.3 sur le polygone de Newton de la multiplication par π sur une loi de groupe formel associée à H .

2.2. La filtration de ramification est contenue dans un appartement de l’immeuble.

— Soit $\mathcal{I}(V)$ l’immeuble de $\text{PGL}(V)$ vu comme ensemble simplicial (cf. appendice A). Considérons les classes d’homothéties

$$([\text{Fil}_\lambda V])_{\lambda \in]0, +\infty]}$$

Elles forment un ensemble fini de sommets dans $\mathcal{I}(V)$. On renvoie à l’appendice A pour les définitions de bases concernant les appartements et les quartiers dans l’immeuble $\mathcal{I}(V)$.

Théorème 2.2. — *L’ensemble fini $\{ [\text{Fil}_\lambda V] \mid \lambda \in]0, +\infty] \}$ est contenu dans un appartement de $\mathcal{I}(V)$. Plus précisément, cet ensemble est contenu dans un quartier de sommet $[\text{Fil}_\infty V]$ dans un appartement. Il est également connexe.*

Démonstration. Considérons la filtration par des sous \mathbb{F}_q -espaces vectoriels sur les points de π -torsion de H

$$\text{Fil}_\lambda (\pi^{-1}\text{Fil}_\infty V / \text{Fil}_\infty V) \quad \lambda \in]0, +\infty]$$

Soit $(e_i^{(1)})_{1 \leq i \leq n}$ une base de $\pi^{-1}\text{Fil}_\infty V / \text{Fil}_\infty V$ scindant la filtration précédente, c’est à dire telle que pour des entiers $1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_r = n$ cette filtration soit donnée par

$$(0) \subsetneq \langle e_1^{(1)}, \dots, e_{\alpha_1}^{(1)} \rangle \subsetneq \cdots \subsetneq \langle e_1^{(1)}, \dots, e_{\alpha_i}^{(1)} \rangle \subsetneq \cdots \subsetneq \langle e_1^{(1)}, \dots, e_n^{(1)} \rangle$$

Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$ soit la suite $(e_i^{(k)})_{k \geq 1}$ définie par récurrence de la façon suivante :

$$\begin{aligned} e_i^{(k)} &\in \pi^{-k}\text{Fil}_\infty V / \text{Fil}_\infty V \\ \pi e_i^{(k+1)} &= e_i^{(k)} \\ \text{et } v(e_i^{(k+1)}) &= \sup\{v(x) \mid \pi x = e_i^{(k)}\} \end{aligned}$$

Les $(e_i^{(k)})_{1 \leq i \leq n}$ forment donc une base du $\mathcal{O}/\pi^k \mathcal{O}$ -module libre $\pi^{-k}\text{Fil}_\infty V / \text{Fil}_\infty V$. La relation de compatibilité $\pi e_i^{(k+1)} = e_i^{(k)}$ implique qu’ils fournissent une base du module de Tate $T_p(H)$. En

termes d'algèbre linéaire cela se traduit de la façon suivante : si pour tout i et k on fixe $\widetilde{e_i^{(k)}} \in V$ un relèvement de $e_i^{(k)} \in V/\text{Fil}_\infty V$ alors en posant

$$\forall i \quad e_i = \lim_{k \rightarrow +\infty} \pi^k \widetilde{e_i^{(k)}} \in \text{Fil}_\infty V$$

On a

$$\text{Fil}_\infty V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle \quad \text{et} \quad e_i^{(k)} \equiv \pi^{-k} e_i \pmod{\text{Fil}_\infty}$$

Montrons que $\forall \lambda \quad \text{Fil}_\lambda V$ est dans l'appartement associé à la base (e_1, \dots, e_n) c'est à dire s'écrit sous la forme $\langle \pi^{-k_1} e_1, \dots, \pi^{-k_n} e_n \rangle$ où $k_i \in \mathbb{N}$. D'après le lemme A.8 de l'appendice A il suffit de montrer que $\forall (a_i)_i \in F^n \quad v(\sum_i a_i e_i)$ ne dépend que des $(v(a_i))_{1 \leq i \leq n}$.

Posons pour tout $k \leq 0 \quad e_i^{(k)} = 0 \in V/\text{Fil}_\infty V$. Tout $x \in V/\text{Fil}_\infty V$, $x \neq 0$, peut s'écrire sous la forme

$$x = \sum_{j=1}^l \sum_{i=\delta_j+1}^{\delta_{j+1}} a_i e_i^{(k(j))}$$

où

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_1 < \delta_2 < \dots < \delta_{l+1} = n \\ k(1) &> k(2) > \dots > k(l) \geq 0 \\ \forall i \quad a_i &\in \mathcal{O}_F \quad \text{et} \quad \forall j > 1 \quad a_{\delta_j} \in \mathcal{O}_F^\times \end{aligned}$$

Nous allons démontrer par récurrence sur l'entier $k \geq 1$ l'assertion suivante :

$$\begin{aligned} (A_k) \quad &\text{Soit } x \text{ écrit sous la forme précédente avec } k(1) = k \\ &\text{alors } v(x) = \inf \{ v(e_{\delta_{j+1}}^{(k(j))}) \mid 1 \leq j \leq l \} \end{aligned}$$

Si $k = 1$, (A_1) est vérifiée par définition des $(e_i^{(1)})_i$. Supposons donc (A_k) vérifiée et soit x comme précédemment avec $k(1) = k + 1$. Alors, d'après la propriété $(**)$ de la "valuation" v sur $V/\text{Fil}_\infty V$ donnée à la fin de la section 2.1

$$\forall j \in \{1, \dots, l\} \quad v(e_{\delta_{j+1}}^{(k(j))}) \geq v(e_{\delta_{j+2}}^{(k(j))}) \geq \dots \geq v(e_{\delta_{j+1}}^{(k(j))})$$

et donc

$$v(x) \geq \inf \{ v(e_{\delta_{j+1}}^{(k(j))}) \mid 1 \leq j \leq l \}$$

De plus, par hypothèse de récurrence

$$v(\pi x) = \inf \{ v(e_{\delta_{j+1}}^{(k(j)-1)}) \mid 1 \leq j \leq l \}$$

Soit $j_0 \in \{1, \dots, l\}$ tel que

$$v(e_{\delta_{j_0+1}}^{(k(j_0)-1)}) = \inf \{ v(e_{\delta_{j+1}}^{(k(j)-1)}) \mid 1 \leq j \leq l \}$$

Alors, toujours d'après la propriété $(**)$

$$\inf \{ v(e_{\delta_{j+1}}^{(k(j))}) \mid 1 \leq j \leq l \} = v(e_{\delta_{j_0+1}}^{(k(j_0))})$$

Or d'après la propriété $(*)$

$$\sup \{ v(y) \mid \pi y = \pi x \} = \sup \{ v(z) \mid \pi z = e_{\delta_{j_0+1}}^{(k(j_0)-1)} \} = v(e_{\delta_{j_0+1}}^{(k(j_0))})$$

Donc

$$v(x) = v(e_{\delta_{j_0+1}}^{(k(j_0))})$$

d'où (A_{k+1}) .

Le résultat sur le fait que la filtration de ramification est contenue dans l'appartement s'en déduit.

Vérifions maintenant que cette filtration est contenue dans le quartier de sommet $[\text{Fil}_\infty]$ égal à

$$\{ \langle \pi^{a_1} e_1, \dots, \pi^{a_n} e_n \rangle \mid a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \}$$

Pour cela il suffit de vérifier que

$$\forall i \leq j \forall a \in \mathbb{Z} v(\pi^a e_i) \geq v(\pi^a e_j)$$

ce qui est clair une nouvelle fois grâce à la propriété (**).

La connexité de l'ensemble de sommets associé résulte de ce qu'étant donné que $\forall x \in V \setminus \{0\}$ $v(\pi x) > v(x)$ on a

$$\forall \lambda \neq +\infty \exists \lambda' > \lambda \pi \text{Fil}_\lambda \subset \text{Fil}_{\lambda'} \subsetneq \text{Fil}_\lambda$$

□

Proposition 2.3. — Soit (e_1, \dots, e_n) la base construite dans le théorème précédent. Soient $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ les valuations des points de π -torsion non-nuls de H , où il y a $q^i - q^{i-1}$ points de valuation λ_i . Soit $I = \{i \in \{1, \dots, n-1\} \mid \lambda_i = \lambda_{i+1}\}$. A un $i \in I$ est associé un mur de l'appartement associé à la base (e_1, \dots, e_n) défini par

$$\{[< \pi^{a_1} e_1, \dots, \pi^{a_n} e_n >] \mid a_i = a_{i+1}\}$$

L'ensemble fini $[\text{Fil}_\lambda V]_\lambda$ est contenu dans l'intersection de ces murs associés à I .

Démonstration. Cela se déduit aisément de la démonstration du théorème précédent. □

2.3. L'algorithme de calcul de la filtration de ramification. — De la démonstration du théorème 2.2 on peut extraire l'algorithme suivant. Soient

$$\lambda_1^{(1)} \geq \dots \geq \lambda_n^{(1)}$$

les pentes du polygone de Newton noté \mathcal{N} de la multiplication par π sur une loi de groupe formelle associée à H où $\lambda_i^{(1)}$ désigne la pente comprise entre les abscisses q^{i-1} et q^i . Définissons pour tout i la suite $(\lambda_i^{(k)})_{k \geq 1}$ par récurrence de la façon suivante : $\lambda_i^{(k+1)}$ est la plus grande pente de l'enveloppe convexe de \mathcal{N} et du point $(0, \lambda_i^{(k)})$, c'est à dire la pente comprise entre les abscisses 0 et 1.

On a donc $\lambda_i^{(k+1)} < \lambda_i^{(k)}$ et pour $k \gg 0$ $\lambda_i^{(k+1)} = \frac{1}{q^n} \lambda_i^{(k)}$.

D'après la démonstration du théorème 2.2 il existe une base (e_1, \dots, e_n) de $T_p(H) = \text{Fil}_\infty V$ telle que

$$\forall i \forall k \geq 1 \quad v(\pi^{-k} e_i) = \lambda_i^{(k)}$$

Pour tout $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$ et tout i soit

$$k(i, \mu) = \sup\{k \geq 0 \mid \lambda_i^{(k)} \geq \mu\}$$

où l'on a posé $\forall i \lambda_i^{(0)} = +\infty$. Alors

$$k(1, \mu) \geq k(2, \mu) \geq \dots \geq k(n, \mu)$$

et

$$\boxed{\text{Fil}_\mu V = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_F \cdot \pi^{-k(i, \mu)} e_i}$$

De plus, pour une telle base

$$\boxed{\forall (x_1, \dots, x_n) \in F^n \quad v\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \inf\{\lambda_i^{(-v(x_i))} \mid 1 \leq i \leq n\}}$$

où l'on a posé $\lambda_i^{(k)} = +\infty$ si $k \leq 0$.

Définition 2.4. — On appellera base adaptée du module de Tate de H une base (e_1, \dots, e_n) de $\text{Fil}_\infty V$ telle que

$$\forall 1 \leq i \leq n \forall k \geq 1 \quad v(\pi^{-k} e_i) = \lambda_i^{(k)}$$

Ainsi pour une base adaptée (e_1, \dots, e_n) la filtration de ramification est située dans le quartier

$$\{[< \pi^{-a_1} e_1, \dots, \pi^{-a_n} e_n >] \mid a_1 \geq \dots \geq a_n\}$$

2.4. L'application $\lambda \mapsto \lambda^{(k)}$ et la fonction de Herbrand. — On renvoie à l'appendice B pour les définitions et propriétés de base concernant les fonctions de Herbrand.

Soit $\mathcal{N} : [0, q^n] \rightarrow \mathbb{R}$ le polygone de Newton de pentes $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. Pour $\lambda \in]0, +\infty[$ on note $(\lambda^{(k)})_{k \geq 1}$ la suite définie par $\lambda^{(1)} = \lambda$ et $\lambda^{(k+1)}$ est la plus grande pente de l'enveloppe convexe de \mathcal{N} et de $(0, \lambda^{(k)})$.

Pour une fonction convexe φ considérons sa duale (cf. appendice B)

$$\varphi^*(t) = \sup\{u \mid \varphi(\bullet) \geq -t \bullet + u\}$$

Notons $\eta(\bullet) = \mathcal{N}^*(\bullet)$ et $\Psi = \eta^{-1}$ la fonction de Herbrand de $H[\pi]$ (cf. appendice B). Alors

$$\forall \lambda \quad \boxed{\lambda^{(k)} = \Psi^{\circ(k-1)}(\lambda)}$$

et $\Psi^{\circ(k-1)}$ est la fonction de Herbrand de $H[\pi^{k-1}]$. On a $\Psi^{\circ(k-1)} = (\eta^{\circ(k-1)})^{-1}$ et

$$\eta^{\circ(k-1)}(s) = \int_0^s |\{x \in H[\pi^{k-1}] \mid v(x) \geq t\}| dt$$

2.5. La facette de l'immeuble associée à la filtration de ramification. —

2.5.1. Première définition. —

Définition 2.5. — Soit $\epsilon \in]0, +\infty[$ tel que $\epsilon \leq \lambda_n$, c'est à dire $\forall x \in \pi^{-1} \text{Fil}_\infty V \quad v(x) \geq \epsilon$. On note S le simplexe de sommets

$$\{\text{Fil}_\lambda V \mid 0 < \lambda \leq \epsilon\}$$

dans l'immeuble $\mathcal{I}(V)$.

Cette définition a bien un sens car pour $0 < \lambda \leq \epsilon$ on a $\text{Fil}_{\lambda/q^n} V = \pi^{-1} \text{Fil}_\lambda V$ qui définit donc une suite périodique de réseaux.

2.5.2. Deuxième définition comme intersection de demi-appartements. — Soit (e_1, \dots, e_n) une base adaptée du module de Tate de H (définition 2.4). Soit \mathcal{A} l'appartement de $\mathcal{I}(V)$ de sommets

$$\{[\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_F \cdot \pi^{-a_i} e_i] \mid a_i \in \mathbb{Z}\}$$

Posons

$$\forall i < j \quad \alpha_{ij}(\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_F \cdot \pi^{-a_i} e_i) = a_i - a_j$$

les fonctions racines sur l'appartement.

D'après la section A.2.5 de l'appendice les simplexes maximaux dans \mathcal{A} sont en bijection avec les collections d'entiers relatifs

$$(b_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}$$

telles que

$$b_{ij} \in \mathbb{Z} \text{ et } \forall i < j < k \quad b_{ik} \in \{b_{ij} + b_{jk}, b_{ij} + b_{jk} + 1\}$$

À $(b_{ij})_{i < j}$ est associé le simplexe dont les sommets sont

$$\{x \in \mathcal{A} \mid \forall i < j \quad \alpha_{ij}(x) \in \{b_{ij}, b_{ij} + 1\}\}$$

La proposition qui suit dit que la manière dont s'ordonnent les valuations des points de torsion en fonction de leur ordre, les $(\lambda_i^{(k)})_{1 \leq i \leq n, k \geq 1}$, déterminent un simplexe dans l'appartement qui est une facette de S .

Proposition 2.6. — Soient $(b_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}$, $b_{ij} \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall i < j \quad \lambda_i^{(b_{ij}+1)} \geq \lambda_j > \lambda_i^{(b_{ij}+2)}$$

Alors, $(b_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}$ définit un simplexe maximal dans \mathcal{A} dont S est une facette égale à l'intersection des murs

$$\{x \mid \alpha_{ij}(x) = b_{ij}\} \quad \text{où } i < j \text{ et } \lambda_i^{(b_{ij}+1)} = \lambda_j$$

avec ce simplexe maximal.

Démonstration. Soient $i < j < k$. On a les inégalités

$$\lambda_j^{(b_{jk}+1)} \geq \lambda_k > \lambda_j^{(b_{jk}+2)}$$

et

$$\lambda_i^{(b_{ij}+1)} \geq \lambda_j > \lambda_i^{(b_{ij}+2)}$$

Mais d'après la remarque 2.8 (énoncée après cette démonstration) on déduit des deux inégalités précédentes

$$\lambda_i^{(b_{ij}+b_{jk}+1)} \geq \lambda_k > \lambda_j^{(b_{ij}+b_{jk}+3)}$$

Ce qui implique que $b_{ik} \in \{b_{ij} + b_{jk}, b_{ij} + b_{jk} + 1\}$. On en déduit donc d'après la section A.2.5 de l'appendice que la donnée des $(b_{ij})_{i < j}$ définit bien un simplexe maximal dans \mathcal{A} .

Soit maintenant $\mu \in]0, +\infty[$ suffisamment petit. Supposons par exemple que $\forall 1 \leq i < j \leq n \quad \mu < \lambda_i^{(b_{ij}+2)}$. Utilisons la formule donnée dans la section 2.3 pour la filtration de ramification :

$$\text{si } \forall i \quad k(i, \mu) \text{ est tel que } \lambda_i^{(k(i, \mu))} \geq \mu > \lambda_i^{(k(i, \mu)+1)}$$

alors

$$\text{Fil}_\mu V = \bigoplus_{i=1}^n \pi^{-k(i, \mu)} \mathcal{O}_F \cdot e_i$$

Soient maintenant $1 \leq i < j \leq n$. De l'inégalité

$$\lambda_i^{(b_{ij}+1)} \geq \lambda_j > \lambda_i^{(b_{ij}+2)}$$

on déduit en appliquant de nouveau la propriété de la remarque 2.8 et l'inégalité $k(i, \mu) \geq b_{ij} + 2$ que

$$\mu > \lambda_i^{(k(i, \mu)+1)} \geq \lambda_j^{(k(i, \mu)-b_{ij}+1)}$$

et

$$\lambda_j^{(k(i, \mu)-b_{ij}-1)} > \lambda_i^{(k(i, \mu))} \geq \mu$$

ce qui implique que

$$k(j, \mu) \in \{k(i, \mu) - b_{ij} - 1, k(i, \mu) - b_{ij}\}$$

c'est à dire $k(i, \mu) - k(j, \mu) \in \{b_{ij}, b_{ij} + 1\}$ et donc $[\text{Fil}_\mu V]$ est dans la chambre définie par $(b_{ij})_{i < j}$.

De même si $\lambda_i^{(b_{ij}+1)} = \lambda_j$ on en déduit que $k(i, \mu) - k(j, \mu) = b_{ij}$ ce qui implique l'assertion sur le fait que $[\text{Fil}_\mu V]$ est dans l'intersection des murs donnés dans la proposition.

Réciproquement on doit vérifier qu'étant donnés des entiers strictement positifs $(k_i)_i$ tels que

$$\forall i < j \quad k_i - k_j \in \{b_{ij}, b_{ij} + 1\} \text{ et si } \lambda_i^{(b_{ij}+1)} = \lambda_j \text{ alors } k_i - k_j = b_{ij}$$

il existe μ tel que $[\text{Fil}_\mu V] = \langle \pi^{-k_1} e_1, \dots, \pi^{-k_n} e_n \rangle$ (nécessairement pour un tel μ $[\text{Fil}_\mu V] \in S$ car $\forall i \quad k_i > 0$). Cela équivaut à trouver μ tel que

$$\forall i \quad \lambda_i^{(k_i)} \geq \mu > \lambda_i^{(k_i+1)}$$

Soit l'intervalle de \mathbb{R} $I_i =]\lambda_i^{(k_i+1)}, \lambda_i^{(k_i)}]$. On vérifie à partir des hypothèses, de la définition des $(b_{ij})_{i, j}$ et de la remarque 2.8 que

$$\forall i < j \quad \lambda_i^{(k_i)} > \lambda_j^{(k_j+1)} \quad \text{et} \quad \lambda_j^{(k_j)} > \lambda_i^{(k_i+1)}$$

Cela implique que $\forall i \neq j \quad I_i \cap I_j \neq \emptyset$. On conclut avec le lemme qui suit. \square

Lemme 2.7. — Soit $(I_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'intervalles de \mathbb{R} . Alors

$$\bigcap_{i=1}^n I_i \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall i \neq j \ I_i \cap I_j \neq \emptyset$$

Remarque 2.8. — La propriété suivante est utilisée à maintes reprises

$$\forall \alpha, \beta \ \forall a, b, c \geq 1 \quad \lambda_\alpha^{(a)} \geq \lambda_\beta^{(b)} \implies \lambda_\alpha^{(a+c)} \geq \lambda_\beta^{(b+c)}$$

et de même en remplaçant \geq par $>$.

2.5.3. *Lien entre la facette et la filtration de ramification.* —

Proposition 2.9. — On a l'égalité suivante

$$\forall \lambda \in]0, +\infty[\ \forall l \in \mathbb{N} \ l \geq 1 \quad \text{Fil}_\lambda V = \pi^{1-l} \text{Fil}_{\lambda^{(l)}} V + \text{Fil}_\infty V$$

Démonstration. Utilisant l'équivalence

$$\forall k \geq 1 \ \forall \mu_1, \mu_2 \in]0, +\infty[\quad \mu_1 \geq \mu_2 \iff \mu_1^{(k)} \geq \mu_2^{(k)}$$

on vérifie facilement avec les notations de la section 2.3 que

$$\forall i \ \forall l \geq 1 \quad k(i, \lambda) = \sup\{k(i, \lambda^{(l)}) + 1 - l, 0\}$$

□

Définition 2.10. — Soient deux sommets $x, y \in \mathcal{I}(V)$. On pose

$$x \vee y = \{[\Lambda_1 + \Lambda_2] \mid [\Lambda_1] = x, [\Lambda_2] = y\}$$

un ensemble fini de sommets de $\mathcal{I}(V)$ contenu dans l'enclos délimité par x et y .

Proposition 2.11. — Le simplexe S ainsi que le sommet $[T_p(H)] = [\text{Fil}_\infty V]$ déterminent complètement les sommets de l'immeuble associés à la filtration de ramification inférieure. Cet ensemble, contenu dans l'enclos délimité par S et $[T_p(H)]$, est égal à

$$\bigcup_{x \in S} (x \vee [\text{Fil}_\infty V])$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition précédente couplée au faits suivants

$$\forall \lambda \in]0, +\infty[\quad \lim_{l \rightarrow +\infty} \lambda^{(l)} = 0$$

et $\forall l \geq 1$ l'application $\lambda \mapsto \lambda^{(l)}$ est une bijection de $]0, +\infty[$ dans lui-même.

□

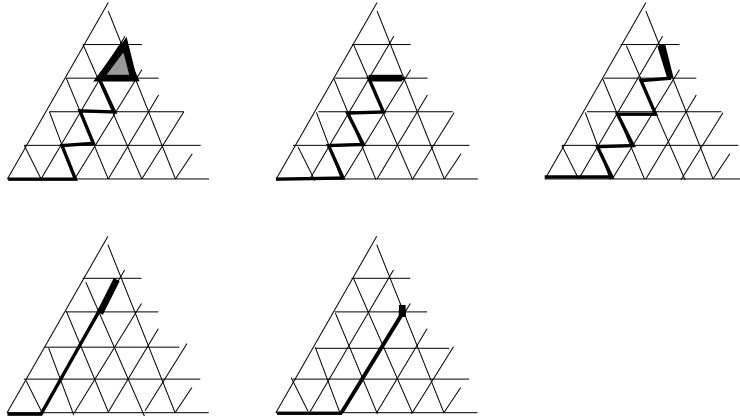


FIGURE 3. Les quatre configurations possibles pour la filtration de ramification inférieure dans le cas de GL_3

3. Filtration de ramification supérieure

On continu d'utiliser les notations de la section précédente.

La filtration étudiée précédemment se comporte bien vis à vis de la restriction à un sous-schéma en groupes, par exemple $\forall \lambda \forall n \leq m \quad H[\pi^n](K)_\lambda = H[\pi^m](K)_\lambda \cap H[\pi^n](K)$. Il s'agit de l'analogue de la filtration de ramification inférieure du groupe de Galois d'une extension de corps locaux ([10]).

La filtration que nous allons étudier dans cette section est adéquat aux isogénies, et donc plus adaptée à l'action de $\mathrm{GL}_n(F)$ par les correspondances de Hecke sur les espaces de Lubin-Tate.

Définition 3.1. — On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in]0, +\infty]$ $H[\pi^n]^\lambda$ la filtration d'Abbes-Saito de $H[\pi^n]$ (cf. appendice B).

Il s'agit d'une filtration décroissante qui d'après la proposition B.15 de l'appendice B vérifie $\forall n \leq m \quad \pi^{m-n} H[\pi^m]^\lambda = H[\pi^n]^\lambda$.

Définition 3.2. — On note $\psi = \eta^{-1}$ la fonction de Herbrand de $H[\pi]$ (cf. appendice B).

On a donc

$$H[\pi^k]^\lambda(K) = H[\pi^k](K)_{\psi^k(\lambda)}$$

Rappelons (cf. section 2.4) que la fonction ψ^k est également celle notée $\lambda \mapsto \lambda^{(k+1)}$ dans les sections précédentes.

Définition 3.3. — Soit pour $\lambda \in]0, +\infty[$

$$\mathrm{Fil}^\lambda V_p(H) = \varprojlim_{k \geq 1} H[\pi^k]^\lambda(K) \subset T_p(H)$$

On a donc en termes de la filtration de ramification inférieure et de la fonction de Herbrand

$$\mathrm{Fil}^\lambda V = \varprojlim_{k \geq 1} (\mathrm{Fil}_{\lambda^{(k+1)}} V \cap \pi^{-k} \mathrm{Fil}_\infty V) / \mathrm{Fil}_\infty V$$

qui définit une filtration décroissante telle que $\mathrm{Fil}^\lambda V = T_p(H)$ pour λ suffisamment petit.

Lemme 3.4. — Soit $\lambda \in]0, +\infty]$. Alors pour $k \gg 0$

$$H[\pi^{k+1}]^\lambda = \{x \in H[\pi^{k+1}] \mid \pi x \in H[\pi^k]^\lambda\}$$

Démonstration. Il suffit de choisir k tel que $\lambda^{(k+1)} = \frac{1}{q^n} \lambda^{(k)}$. □

D'après le lemme précédent les $\mathrm{Fil}^\lambda V$ forment donc des réseaux dans V et on a

$$\forall \lambda \quad \mathrm{Fil}^\lambda V = \pi^k \mathrm{Fil}_{\lambda^{(k+1)}} V \cap T_p(H) \quad \text{pour } k \gg 0$$

On en déduit la propositions suivante

Proposition 3.5. — La filtration $(\mathrm{Fil}^\lambda V)_{\lambda \in]0, +\infty]}$ forme une chaîne périodique de réseaux dans $T_p(H)$ pour $\lambda \gg 0$ telle que le simplexe associé dans l'immeuble de $\mathrm{PGL}(V)$ soit le simplexe noté S dans la définition 2.5 de la section précédente.

On a une description explicite de la filtration de ramification supérieure analogue à celle donnée dans la section 2.3 pour la filtration de ramification inférieure :

Proposition 3.6. — Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base adaptée du module de Tate $T_p(H)$. Posons

$$\forall i \quad \forall \mu \in]0, +\infty[\quad l(i, \mu) = \inf \{l \geq 0 \mid \lambda_i \geq \mu^{(l+2)}\}$$

Alors

$$\mathrm{Fil}^\mu V = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_F \cdot \pi^{l(i, \mu)} e_i$$

Démonstration. Il suffit d'écrire pour $\lambda \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \pi^l e_i \in \text{Fil}^\mu V &\iff \text{pour } k \gg 0 \ \pi^{l-k} e_i \in \text{Fil}_{\mu^{(k+1)}} V \\ &\iff \text{pour } k \gg 0 \ \lambda_i^{(k-l)} \geq \mu^{(k+1)} \\ &\iff \lambda_i \geq \mu^{(l+2)} \end{aligned}$$

□

Définition 3.7. — Soient x, y deux sommets de $\mathcal{I}(V)$. On pose

$$x \wedge y = \{[\Lambda_1 \cap \Lambda_2] \mid [\Lambda_1] = x, [\Lambda_2] = y\}$$

Voici la proposition cousine de la proposition 2.11

Proposition 3.8. — *Le simplexe S ainsi que le sommet $[\text{Fil}_\infty V]$ déterminent complètement les sommets de l'immeuble associés à la filtration de ramification supérieure. Cet ensemble, contenu dans l'enclos délimité par $[\text{Fil}_\infty V]$ et S , est égal à*

$$\bigcup_{x \in S} (x \wedge [\text{Fil}_\infty V])$$

4. Le point de l'immeuble associé à l'application de Hodge-Tate duale

4.1. Une formule générale. — Soit H comme dans les chapitres précédents. Soit

$$\alpha_{H^D}^{\mathcal{O}} : T_p(H^\vee) \longrightarrow \omega_H \simeq \mathcal{O}_K$$

et

$$\alpha_{H^\vee}^{\mathcal{O}}(-1) : T_p(H)^* \longrightarrow \omega_H(-1) \simeq \mathcal{O}_K$$

où $F(1)$ désigne le module de Tate d'un groupe de Lubin-Tate de \mathcal{O} -hauteur 1.

Considérons la norme "additive" associée

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : T_p(H)^* &\longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ \varphi &\longmapsto v(\alpha_{H^D}(-1)(\varphi)) \end{aligned}$$

Soit $(\text{Fil}_\lambda V_p(H))_{\lambda \in]0, +\infty]}$ la filtration de ramification inférieure telle que définie dans la section 2.1.

Proposition 4.1. — *Soit $\mu \in]0, +\infty]$. Soit $\varphi \in T_p(H)^* \setminus \{0\}$ tel que $\varphi(\text{Fil}_\mu V_p(H)) = \mathcal{O}_F$. Soit $M = \ker \varphi \otimes \mathbb{Q}_p \subset V_p(H)$. Soit $\text{Fil}_\lambda M = \text{Fil}_\lambda V_p(H) \cap M$ la filtration induite sur M . Alors*

$$\|\varphi\| = \int_0^\mu (|\text{Fil}_\mu V_p(H)/\text{Fil}_\lambda V_p(H)| \cdot |\text{Fil}_\lambda M/\text{Fil}_\mu M| - 1) d\lambda + v(\text{Fil}_\mu V_p(H)/\text{Fil}_\infty V_p(H))$$

Démonstration. Soit $\tilde{\varphi} = \varphi \otimes \text{Id} : T_p(H) \otimes F/\mathcal{O}_F \longrightarrow F/\mathcal{O}_F$. D'après le théorème 1.11

$$\|\varphi\| = \sum_{x \in \ker \tilde{\varphi} \setminus \{0\}} v(x)$$

De plus il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Fil}_\mu V/\text{Fil}_\infty V \longrightarrow \ker \tilde{\varphi} \longrightarrow M/\text{Fil}_\mu M \longrightarrow 0$$

Soient $(\lambda_k)_{k \geq 0}$, $\lambda_{k+1} < \lambda_k$ les sauts de la filtration $(\text{Fil}_\lambda V_p(H))_{\lambda \geq \mu}$ (avec $\lambda_0 = \mu$). Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in \ker \tilde{\varphi} \setminus (\text{Fil}_\mu V / \text{Fil}_\infty V)} v(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} (|(\text{Fil}_{\lambda_k} M + \text{Fil}_\mu V) / \text{Fil}_\infty V| - |(\text{Fil}_{\lambda_{k-1}} M + \text{Fil}_\mu V) / \text{Fil}_\infty V|) \lambda_k \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} ((|(\text{Fil}_{\lambda_k} M + \text{Fil}_\mu V) / \text{Fil}_\infty V| - 1) - (|(\text{Fil}_{\lambda_{k-1}} M + \text{Fil}_\mu V) / \text{Fil}_\infty V| - 1)) \lambda_k \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (|\text{Fil}_\mu V / \text{Fil}_\infty V| \cdot |(\text{Fil}_{\lambda_k} M + \text{Fil}_\mu V) / \text{Fil}_\mu V| - 1) (\lambda_k - \lambda_{k+1}) \\
&= \int_0^\mu (|\text{Fil}_\mu V / \text{Fil}_\infty V| \cdot |\text{Fil}_\lambda M / \text{Fil}_\mu M| - 1) d\lambda
\end{aligned}$$

□

Corollaire 4.2. — Soit λ_n la plus petite valuation des points de $H[\pi](\mathcal{O}_K)$. Soit $\mu \in]0, +\infty[$. Soit ϵ tel que $\epsilon \leq \mu$ et $0 < \epsilon \leq \lambda_n$. Il existe alors une constante C telle que $\forall \varphi \in V_p(H)^*$ tel que $\varphi(\text{Fil}_\mu V_p(H)) = \mathcal{O}_F$ si $M = \ker \varphi \otimes \mathbb{Q}_p$ on ait

$$\|\varphi\| = \Delta_\mu \left[\int_\epsilon^\mu |\text{Fil}_\lambda M / \text{Fil}_\infty M| d\lambda + \frac{q}{q-1} \int_{\epsilon/q^n}^\epsilon |\text{Fil}_\lambda M / \text{Fil}_\infty M| d\lambda \right] + C$$

où $\Delta_\mu = |\text{Fil}_\mu V_p(H) / \text{Fil}_\infty V_p(H)|$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser le fait que $\forall \lambda \leq \epsilon$ on a $\text{Fil}_{\lambda/q^n} M = \pi^{-1} \text{Fil}_\lambda M$ et que donc

$$\begin{aligned}
\int_0^\epsilon |\text{Fil}_\lambda M / \text{Fil}_\infty M| d\lambda &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\epsilon/q^{n(k+1)}}^{\epsilon/q^{nk}} |\text{Fil}_\lambda M / \text{Fil}_\infty M| d\lambda \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{q^{nk}} \int_{\epsilon/q^n}^\epsilon \underbrace{|\text{Fil}_{\lambda/q^{nk}} M / \text{Fil}_\infty M|}_{|\pi^{-k} \text{Fil}_\lambda M / \text{Fil}_\infty M| = q^{(n-1)k} |\text{Fil}_\lambda M / \text{Fil}_\infty M|} d\lambda \\
&= \frac{q}{q-1} \int_{\epsilon/q^n}^\epsilon |\text{Fil}_\lambda M / \text{Fil}_\infty M| d\lambda
\end{aligned}$$

□

Définition 4.3. — Soit Λ un réseau dans $V_p(H)$. On note $\Lambda^\vee = \{\varphi \in V_p(H)^* \mid \varphi(\Lambda) \subset \mathcal{O}_F\}$ le réseau dual. On note alors $(\text{Fil}_\lambda V_p(H)^*)_{\lambda \in]0, +\infty]}$ la filtration croissante de $V_p(H)^*$ égale à $((\text{Fil}_\lambda V_p(H))^\vee)_{\lambda \in]0, +\infty]}$. On note $\|\cdot\|_\lambda$ la norme “additive” sur $V_p(H)^*$ associée au réseau $\text{Fil}_\lambda V_p(H)^*$.

Théorème 4.4. — Soit la fonction

$$\begin{aligned}
f :]0, +\infty] &\longrightarrow \mathbb{R} \\
\lambda &\longmapsto |\text{Fil}_\lambda V_p(H) / \text{Fil}_\infty V_p(H)|
\end{aligned}$$

Soient μ et ϵ comme dans le corollaire précédent. Il existe alors une constante C telle que

$$\begin{aligned}
\forall \varphi \in V_p(H)^* \setminus \{0\} \quad \|\varphi\| &= \int_0^\mu f(\lambda) q^{\|\varphi\|_\lambda - \|\varphi\|_\mu} d\lambda + \|\varphi\|_\mu + C \\
&= \int_\epsilon^\mu f(\lambda) q^{\|\varphi\|_\lambda - \|\varphi\|_\mu} d\lambda + \frac{q}{q-1} \int_{\epsilon/q^n}^\epsilon f(\lambda) q^{\|\varphi\|_\lambda - \|\varphi\|_\mu} d\lambda + \|\varphi\|_\mu + C
\end{aligned}$$

Démonstration. Lorsqu'on remplace φ par $\pi^k \varphi$ les membres des formules données sont tous translatés de k . On peut donc supposer que $\varphi(\text{Fil}_\mu V_p(H)) = \mathcal{O}_F$ c'est à dire $\|\varphi\|_\mu = 0$.

Il suffit alors de remarquer que si $M = \ker \varphi \otimes \mathbb{Q}_p$ on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Fil}_\lambda M / \text{Fil}_\mu M \longrightarrow \text{Fil}_\lambda V_p(H) / \text{Fil}_\mu V_p(H) \longrightarrow \varphi(\text{Fil}_\lambda V_p(H)) / \mathcal{O}_F \longrightarrow 0$$

et que $\varphi(\text{Fil}_\lambda V_p(H)) = \pi^{\|\varphi\|_\lambda} \mathcal{O}_F$. Cela implique que

$$|\text{Fil}_\mu V_p(H)/\text{Fil}_\infty V_p(H)| \cdot |\text{Fil}_\lambda M/\text{Fil}_\mu M| = f(\lambda) q^{\|\varphi\|_\lambda}$$

d'où le résultat par application du corollaire précédent. \square

Corollaire 4.5. — Soit $\mu \in]0, +\infty[$ tel que $\mu \leq \lambda_n$. Il existe alors une constante C telle que

$$\forall \varphi \in V_p(H)^* \setminus \{0\} \quad \|\varphi\| = \frac{q}{q-1} \int_{\mu/q^n}^{\mu} f(\lambda) q^{\|\varphi\|_\lambda - \|\varphi\|_\mu} d\lambda + \|\varphi\|_\mu + C$$

4.2. Applications. —

Proposition 4.6. — Soit $[\|\cdot\|] \in |\mathcal{I}(V_p(H)^*)|$ le point de l'immeuble associé à l'application de Hodge-Tate duale de H . Alors, $[\|\cdot\|]$ appartient à la réalisation géométrique du simplexe S associé à la filtration de ramification de H .

Démonstration. Il résulte du corollaire 4.5 que la norme $\|\cdot\|$ ne dépend que des normes associées à des réseaux dont la classe d'homothétie est dans S . D'où le résultat. \square

Proposition 4.7. — Soient $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ les pentes du polygone de Newton associé à H . Soit (e_1, \dots, e_n) une base adaptée de $T_p(H)$ et (e_1^*, \dots, e_n^*) la base duale associée. Soit $\forall i < j$ α_{ij} la racine $\text{diag}(t_1, \dots, t_n) \mapsto t_i - t_j$ dans la base précédente de $V_p(H)^*$.

Si pour $i < j$ $\lambda_i^{(b_{ij}+1)} = \lambda_j$ alors le point de Hodge-Tate dual appartient au mur $\alpha_{ij} = -b_{ij}$

Démonstration. C'est une conséquence de la description donnée du simplexe S comme intersection de demi-appartements et de murs (proposition 2.6). \square

Exemple 4.8. — Si $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$ c'est à dire le polygone de Newton de la multiplication par π est plat alors $[\|\cdot\|] = [T_p(H)^*]$.

Exemple 4.9. — Si $a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$ sont des entiers et le polygone de Newton de H vérifie

$$\forall i < j \quad \lambda_i^{(a_i - a_j + 1)} = \lambda_j$$

alors le point de Hodge-Tate de H est un sommet dans l'appartement. Dans une base comme dans la proposition précédente ce sommet est $[< \pi^{-a_1} e_1^*, \dots, \pi^{-a_n} e_n^* >]$.

4.3. Expression en termes de la filtration de ramification supérieure. —

Proposition 4.10. — Soit $\|\cdot\|^\lambda$ la norme sur $V_p(H)^*$ associée au réseau $(\text{Fil}^\lambda V_p(H))^\vee$. Pour $\mu \gg 0$ il existe une constante C telle que

$$\forall \varphi \in V_p(H)^* \setminus \{0\} \quad \|\varphi\| = \frac{q}{q-1} \int_{\mu-1}^{\mu} q^{\|\varphi\|^\lambda - \|\varphi\|^\mu} d\lambda + \|\varphi\|^\mu + C$$

Démonstration. Effectuer un changement de variables dans l'intégrale couplé à la formule exprimant la fonction η de Herbrand comme une intégrale. \square

5. Une structure simpliciale sur le squelette de l'espace de Lubin-Tate

5.1. Rappels sur l'espace de Lubin-Tate. — Nous reprenons les notations de [5]. Soit

$$\mathfrak{X} \simeq \text{Spf}(\widehat{\mathcal{O}_{F^{nr}}}[[x_1, \dots, x_{n-1}]])$$

l'espace de Lubin-Tate des déformations d'un \mathcal{O} -module π -divisible formel de dimension 1 et de hauteur n . On suppose les coordonnées (x_1, \dots, x_{n-1}) normalisées de telle manière que sur une loi de groupe formelle universelle le polygone de Newton de la multiplication par π soit l'enveloppe convexe des points $(1, 1), (q^i, v(x_i))_{1 \leq i \leq n-1}$ et $(q^n, 0)$ (cf. la section 1.5 de [5]).

Soit \mathfrak{X}^{an} l'espace de Berkovich associé, $\mathfrak{X}^{an} \simeq \mathbb{B}^{n-1}$. On appelle squelette de \mathfrak{X}^{an} l'espace topologique

$$S(\mathfrak{X}^{an}) =]0, +\infty]^{n-1} \subset |\mathfrak{X}^{an}|$$

où l'inclusion est donnée par l'application qui à $(r_1, \dots, r_{n-1}) \in]0, +\infty]^{n-1}$ associe la norme “additive”

$$\left| \sum_{\underline{\alpha}=(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}} a_{\underline{\alpha}} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \right| = \inf_{\underline{\alpha}} \{v(a_{\underline{\alpha}}) + \alpha_1 r_1 + \dots + \alpha_{n-1} r_{n-1}\}$$

Il y a une rétraction

$$\begin{aligned} r : |\mathfrak{X}^{an}| &\longrightarrow S(\mathfrak{X}^{an}) \\ |\cdot| &\longmapsto (|x_i|)_{1 \leq i \leq n-1} \end{aligned}$$

où $|\cdot|$ désigne une semi-norme “additive”.

5.2. L'espace de Newton. —

Définition 5.1. — On note $Newt$ l'ensemble des fonctions convexes $f : [1, q^n] \longrightarrow]0, +\infty[$ linéaires sur les segments $[q^i, q^{i+1}]$ pour $1 \leq i \leq n-1$, ne s'annulant pas sur $[1, q^n[$, vérifiant $f(1) = 1$ et $f(q^n) = 0$.

Une telle fonction $f \in Newt$ est décroissante et vérifie $\text{Im} f = [01]$. On muni $Newt$ de la topologie de la convergence uniforme sur les fonctions continues de $[1, q^n]$ à valeurs dans $[01]$. On vérifie aussitôt le lemme suivant :

Lemme 5.2. — *L'ensemble $Newt$ est convexe dans l'espace des fonctions de $[1, q^n]$ à valeurs dans \mathbb{R} .*

Ainsi on a une “structure affine” sur $Newt$ au sens où l'on a une notion de barycentre :

$$\forall I \text{ fini } \forall (\gamma_i)_i \in \mathbb{R}_+^I \text{ vérifiant } \sum_i \gamma_i = 1 \quad \forall (f_i)_i \in Newt^I \quad \sum_i \gamma_i f_i \in Newt$$

Une description concrète de $Newt$ que l'on utilisera est la suivante :

$$Newt = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n > 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n (q^i - q^{i-1}) \lambda_i = 1\}$$

où λ_i désigne la pente du polygone de Newton entre les abscisses q^{i-1} et q^i . Dans cette description le barycentre dans $Newt$ consiste à prendre le barycentre des pentes $(\lambda_i)_i$, la structure affine est induite par celle de \mathbb{R}^n .

Il y a une application continue surjective

$$\begin{aligned} S(\mathfrak{X}^{an}) &\longrightarrow Newt \\ (v_1, \dots, v_{n-1}) &\longmapsto \text{Conv}((1, 1), (q, v_1), \dots, (q^{n-1}, v_{n-1}), (q^n, 0)) \end{aligned}$$

où Conv désigne l'enveloppe convexe. Pour toute extension valuée complète $K|\widehat{F^{nr}}$ l'application composée

$$\mathfrak{X}^{an}(K) \longrightarrow |\mathfrak{X}^{an}| \xrightarrow{r} S(\mathfrak{X}^{an}) \longrightarrow Newt$$

est celle qui à une déformation (H, ρ) avec H un \mathcal{O} -module π -divisible sur \mathcal{O}_K associe le polygone de la multiplication par π sur une loi de groupe formelle associée.

Remarque 5.3. — Soit D l'algèbre à division d'invariant $1/n$ telle que D^\times agisse sur l'espace de Lubin-Tate (cf. [5]). L'application $\mathfrak{X}^{an}(K) \longrightarrow Newt$ est D^\times -invariante.

Définition 5.4. — Soit un polygone dans $Newt$ donné par ses pentes $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. On notera pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout i $\lambda_i^{(k)}$ le nombre donné par $\lambda_i^{(k)} = +\infty$ si $k \leq 0$, $\lambda_i^{(1)} = \lambda_i$ et $\lambda_i^{(k+1)}$ est la plus grande pente de l'enveloppe convexe de $(0, \lambda_i^{(k)})$ et du polygone dont on est parti.

5.3. Les opérateurs $(\pi^{-a_1}, \dots, \pi^{-a_n})$ sur l'espace de Newton. — Dans cette section nous définissons et étudions des opérateurs qui sont des sections des correspondances de Hecke non-ramifiées, sections définies uniquement au niveau des polygones de Newton.

5.3.1. Définition. —

Proposition 5.5. — Soit $\varphi : H_1 \longrightarrow H_2$ une isogénie entre \mathcal{O} -modules formels de dimension 1. Le polygone de Newton de la multiplication par π sur H_2 ne dépend que de celui de la multiplication par π sur H_1 ainsi que de celui de $\ker \varphi$ (on entend par là la collection des $v(x), x \in \ker \varphi \setminus \{0\}$, comptées avec multiplicité).

Démonstration. Soit $C = \{x \in H_1 \mid \pi x \in \ker \varphi\}$. Alors $C/\ker \varphi \simeq H_2[\pi]$. Après un choix de bonnes coordonnées formelles la composition d'isogénies de groupes formels

$$H_1 \xrightarrow{\alpha} H_1/\ker \varphi \xrightarrow{\beta} H_1/C$$

s'écrit

$$\beta^*T = g(T), \quad \alpha^*(T) = f(T)$$

où f et g sont deux polynômes unitaires dans $\mathcal{O}_K[T]$. Le polygone de Newton de f est connu par hypothèse. Celui de $f \circ g$ également d'après les rappels du début de la section 1.3.

Le résultat est donc une conséquence de ce que si f et g sont deux polynômes unitaires dans $\mathcal{O}_K[T]$ alors $\text{Newt}(f \circ g)^* = \text{Newt}(f)^* \circ \text{Newt}(g)^*$ (cf. le lemme B.12 de l'appendice B) et que ces fonctions sont bijectives, donc $\text{Newt}(f \circ g)$ et $\text{Newt}(f)$ déterminent $\text{Newt}(g)^*$ et donc $\text{Newt}(g)$. \square

Corollaire 5.6. — Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$. Soit H un \mathcal{O} -module π -divisible formel de dimension 1 et hauteur n sur \mathcal{O}_K avec K algébriquement clos. Soit (e_1, \dots, e_n) une base adaptée de son module de Tate (cf. définition 2.4). Soit $C \subset H$ l'adhérence schématique du sous-groupe fini $\langle \pi^{-a_1} \bar{e}_1, \dots, \pi^{-a_n} \bar{e}_n \rangle \subset T_p(H) \otimes F/\mathcal{O}_F$ de la fibre générique de H et $H' = H/C$. Alors le polygone de Newton associé à H' ne dépend que de celui de H et des $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Démonstration. D'après les formules données dans la section 2.3 les valuations des éléments de C ne dépendent que des $(\lambda_i^{(k)})_{1 \leq i \leq n, k \geq 1}$ qui eux mêmes ne dépendent que des $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n-1}$. Le résultat est donc une conséquence de la proposition précédente. \square

On peut donc définir $\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ un opérateur

$$(\pi^{-a_1}, \dots, \pi^{-a_n}) : \text{Newt} \longrightarrow \text{Newt}$$

tel que $\forall K$, via l'application $\mathfrak{X}^{an}(K) \longrightarrow \text{Newt}$, celui-ci soit donné comme dans le corollaire précédent par le quotient par le sous-groupe adhérence schématique de $\langle \pi^{-a_1} \bar{e}_1, \dots, \pi^{-a_n} \bar{e}_n \rangle$.

5.3.2. Une formule explicite pour les isogénies. —

5.3.3. Un lemme stupide. —

Lemme 5.7. — Soit R un anneau et $F(X, Y) \in R[[X, Y]]$ une loi de groupe formelle commutative de dimension 1. Soit $X \underset{F}{-} Y = F(X, \iota(Y)) \in R[[X, Y]]$ où $\iota \in R[[T]]$ est l'inversion formelle associée à F (l'unique série telle que $\iota(0) = 0$ et $F(T, \iota(T)) = 0$). Alors

$$\exists h \in R[[X, Y]]^\times \quad X \underset{F}{-} Y = (X - Y) \times h$$

Démonstration. Soit l'anneau Y -adique $A = R[[Y]]$ et $X \underset{F}{-} Y \in A[[X]]$. Appliquons le lemme de division de Weierstrass à cette série et au polynôme $X - Y \in A[X]$.

$$\exists h \in A[[X]] \quad \exists a \in A \quad X \underset{F}{-} Y = (X - Y)h + a$$

Mais si l'on fait $X = Y$ on obtient $a = 0$. De plus $X \underset{F}{-} Y \equiv X - Y \pmod{\deg 2}$. Donc $h(0) = 1$ et h est inversible. \square

Remarque 5.8. — Le lemme précédent est faux si l'on remplace le couple $(X \underset{F}{-} Y, X - Y)$ par $(X \underset{F}{+} Y, X + Y)$.

Corollaire 5.9. — Soit $\varphi : H_1 \longrightarrow H_2$ une isogénie de \mathcal{O} -modules formels de dimension 1 sur \mathcal{O}_K (K algébriquement clos). Alors

$$\forall x \in H_1(\mathcal{O}_K) \quad v(\varphi(x)) = \sum_{a \in \ker \varphi} v(x - a)$$

où $x - a$ désigne la différence entre x et a dans le groupe $H_1(\mathcal{O}_K)$.

Démonstration. On sait qu'après un bon choix de coordonnées formelles à la source et au but l'isogénie s'écrit

$$\prod_{a \in \ker \varphi} (T - a)$$

Donc $v(\varphi(x)) = \sum_{a \in \ker \varphi} v(x - a)$. On conclut d'après le lemme précédent. \square

5.3.4. La formule. — Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ et H sur \mathcal{O}_K dont le polygone de Newton associé a pour pentes $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. Soit (e_1, \dots, e_n) une base adaptée de $T_p(H)$. Rappelons que d'après la section 2.3

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in F^n \quad v\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \inf\{\lambda_i^{(-v(x_i))} \mid 1 \leq i \leq n\}$$

Soit C l'adhérence schématique du sous-groupe $\langle \pi^{-a_1} \bar{e}_1, \dots, \pi^{-a_n} \bar{e}_n \rangle \subset T_p(H) \otimes F/\mathcal{O}_F$ et $\varphi : H \rightarrow H/C$. Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ dont on veut calculer $v(\varphi(x))$. On peut supposer que pour un sous-ensemble $I \subset \{1, \dots, n\}$ $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$ où $\forall i \in I \quad v(x_i) < -a_i$. Alors

$$\begin{aligned} v(\varphi(x)) &= \sum_{y \in \ker \varphi} v(x + y) \\ &= \sum_{(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{O}/\pi^{a_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{O}/\pi^{a_n}} v\left(\sum_{i \in I} (x_i + t_i \pi^{-a_i}) e_i + \sum_{i \notin I} t_i \pi^{-a_i} e_i\right) \\ &= \sum_{(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{O}/\pi^{a_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{O}/\pi^{a_n}} \inf\{\lambda_i^{(-v(x_i))} \mid i \in I\} \cup \{\lambda_i^{(a_i - v(t_i))} \mid i \notin I\} \\ &= q^{\sum_{i \in I} a_i} \sum_{\substack{(k_i)_{i \notin I} \\ 0 \leq k_i \leq a_i}} \prod_{i \notin I} A(k_i) \inf\{\lambda_i^{(-v(x_i))} \mid i \in I\} \cup \{\lambda_i^{(k_i)} \mid i \notin I\} \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$A(k) = \begin{cases} q^k - q^{k-1} & \text{si } k \geq 1 \\ 1 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

5.3.5. Composition des opérateurs $(\pi^{-a_1}, \dots, \pi^{-a_n})$. —

Théorème 5.10. — Soient H un \mathcal{O} -module π -divisible formel de dimension 1 et hauteur n sur \mathcal{O}_K tel que le polygone de Newton associé ait pour pentes $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. Soit (e_1, \dots, e_n) une base adaptée de $T_p(H)$. Soit C l'adhérence schématique de $\langle \pi^{-a_1} \bar{e}_1, \dots, \pi^{-a_n} \bar{e}_n \rangle \subset T_p(H) \otimes F/\mathcal{O}_F$ et $\varphi : H \rightarrow H/C = H'$. Soit $\varphi_* : T_p(H) \hookrightarrow T_p(H')$ le morphisme induit. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation telle que

$$\lambda_{\sigma(1)}^{(a_{\sigma(1)})} \geq \lambda_{\sigma(2)}^{(a_{\sigma(2)})} \geq \dots \geq \lambda_{\sigma(n)}^{(a_{\sigma(n)})}$$

Alors, si l'on pose

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \epsilon_i = \varphi_*(\pi^{-a_{\sigma(i)}} e_{\sigma(i)})$$

$(\epsilon_i)_i$ est une base adaptée de $T_p(H')$.

Démonstration. Reprenons la formule donnée dans la section précédente

$$\begin{aligned}
v(\varphi(x)) &= q^{\sum_{i \in I} a_i} \sum_{\substack{(k_i)_{i \notin I} \\ 0 \leq k_i \leq a_i}} \left(\prod_{i \notin I} A(k_i) \right) \inf \{ \lambda_i^{(-v(x_i))} \mid i \in I \} \cup \{ \lambda_i^{(k_i)} \mid i \notin I \} \\
&= \sum_{\substack{(k_i)_{1 \leq i \leq n} \\ 0 \leq k_i \leq a_i}} \left(\prod_{1 \leq i \leq n} A(k_i) \right) \inf \{ \lambda_i^{(-v(x_i))} \mid i \in I \} \cup \{ \lambda_i^{(k_i)} \mid 1 \leq i \leq n \} \\
&= \inf_{i \in I} \sum_{\substack{(k_j)_{1 \leq j \leq n} \\ 0 \leq k_j \leq a_j}} \left(\prod_{1 \leq j \leq n} A(k_j) \right) \inf \{ \lambda_i^{(-v(x_i))} \} \cup \{ \lambda_j^{(k_j)} \mid 1 \leq j \leq n \} \\
&= \inf_{i \in I} v(\varphi(x_i e_i))
\end{aligned}$$

et de plus $\forall i \ v(\varphi(x_i e_i))$ ne dépend que de $v(x_i)$. On a

$$\lambda_{\sigma(1)}^{(a_{\sigma(1)}+1)} \geq \lambda_{\sigma(2)}^{(a_{\sigma(2)}+1)} \geq \dots \geq \lambda_{\sigma(n)}^{(a_{\sigma(n)}+1)}$$

et donc grâce à la formule ci-dessus

$$v(\varphi(\pi^{-a_{\sigma(1)}-1} e_1)) \geq \dots \geq v(\varphi(\pi^{-a_{\sigma(n)}-1} e_{\sigma(n)}))$$

ce qui implique que cette suite de valuations est la suite des pentes du polygone de Newton associé à H' . Reste à voir que

$$\forall i \ \forall k \geq 1 \ \forall y \in H'[\pi] \ v(\varphi(\pi^{-a_i-k-1} e_i)) \geq v(\varphi(\pi^{-a_i-k-1} e_i) + y)$$

Mais cela résulte de la formule $v(\varphi(x)) = \inf_{i \in I} v(\varphi(x_i e_i))$. □

Corollaire 5.11. — Soient $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{N}^n$.

– Pour tout $\mathcal{P} \in \text{Newt}$ il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que

$$(\pi^{-a_1}, \dots, \pi^{-a_n}).((\pi^{-b_1}, \dots, \pi^{-b_n}).\mathcal{P}) = (\pi^{-(a_{\sigma(1)}+b_1)}, \dots, \pi^{-(a_{\sigma(n)}+b_n)}).\mathcal{P}$$

– Si $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ on peut prendre $\sigma = \text{Id}$

– En particulier il y a une action du monoïde

$$\{(\pi^{-a_1}, \dots, \pi^{-a_n}) \mid 0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n\}$$

sur Newt .

Remarque 5.12. — Bien sûr $\forall b \in \mathbb{N}$ l'action de $(\pi^{-a_1}, \dots, \pi^{-a_n})$ est la même que celle de $(\pi^{-(a_1+b)}, \dots, \pi^{-(a_n+b)})$ ce qui permet de définir une action du monoïde défini comme précédemment en relâchant la condition $a_1 \geq 0$.

5.4. Définition des simplexes maximaux en termes des pentes de Newton. —

Définition 5.13. — Soit (e_1, \dots, e_n) la base canonique de F^n . On note \mathcal{A} l'appartement de l'immeuble de PGL_n associé (cf. appendice A) et Q le quartier dont les sommets sont les classes de réseaux

$$\{[\pi^{a_1} e_1, \dots, \pi^{a_n} e_n] \mid a_1 \leq \dots \leq a_n\}$$

On note $\text{pr}_Q : \mathcal{A} \rightarrow Q$ la projection de l'appartement sur son quartier (cf. la section A.6.1 de l'appendice A).

Notons pour tout $i < j$ $\alpha_{ij}(< \pi^{a_1} e_1, \dots, \pi^{a_n} e_n >) = a_j - a_i$. D'après la section A.2.5 de l'appendice les simplexes maximaux dans \mathcal{A} sont en bijection avec les collections

$$(b_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}$$

telles que

$$b_{ij} \in \mathbb{Z} \text{ et } \forall i < j < k \ b_{ik} \in \{b_{ij} + b_{jk}, b_{ij} + b_{jk} + 1\}$$

À $(b_{ij})_{i < j}$ est associé le simplexe dont les sommets sont

$$\{x \in Q \mid \forall i < j \ \alpha_{ij}(x) \in \{b_{ij}, b_{ij} + 1\}\}$$

Les simplexes maximaux dans Q sont eux paramétrés par les $(b_{ij})_{i < j}$ comme ci-dessus avec la condition supplémentaire $\forall i < j \ b_{ij} \in \mathbb{N}$.

Définition 5.14. — Soit S un simplexe maximal dans le quartier Q associé à $(b_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}$. Notons $Newt(S)$ le sous-ensemble de $Newt$ formé des polygones de Newton dont les pentes satisfont

$$\forall i < j \quad \lambda_i^{(b_{ij}+1)} \geq \lambda_j \geq \lambda_j^{(b_{ij}+2)}$$

Lemme 5.15. — Les ensembles $Newt(S)$ sont convexes. De plus pour tout i et k l'application à valeurs dans \mathbb{R} qui à un polygone associé aux pentes $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ associe $\lambda_i^{(k)}$ est affine sur les $Newt(S)$.

Démonstration. Nous laissons au lecteur le soin de se convaincre de ce lemme en dessinant quelques polygones de Newton. \square

Lemme 5.16. — Les convexes précédents recouvrent $Newt$:

$$Newt = \bigcup_S Newt(S)$$

où S parcourt les simplexes maximaux dans Q .

Démonstration. Soit un polygone de Newton associé aux pentes $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. Soient $(b_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}$, $b_{ij} \in \mathbb{N}$, tels que

$$\forall i < j \quad \lambda_i^{(b_{ij}+1)} \geq \lambda_j > \lambda_j^{(b_{ij}+2)}$$

Soient $i < j < k$. On a les inégalités

$$\lambda_j^{(b_{jk}+1)} \geq \lambda_k > \lambda_j^{(b_{jk}+2)}$$

et

$$\lambda_i^{(b_{ij}+1)} \geq \lambda_j > \lambda_j^{(b_{ij}+2)}$$

Mais

$$\forall \alpha, \beta \ \forall a, b, c \geq 0 \quad \lambda_\alpha^{(a)} \geq \lambda_\beta^{(b)} \implies \lambda_\alpha^{(a+c)} \geq \lambda_\beta^{(b+c)}$$

(et de même avec $>$ au lieu de \geq) et donc

$$\lambda_i^{(b_{ij}+b_{jk}+1)} \geq \lambda_k > \lambda_j^{(b_{ij}+b_{jk}+3)}$$

Ce qui implique que $b_{ik} \in \{b_{ij} + b_{jk}, b_{ij} + b_{jk} + 1\}$. \square

Exemple 5.17. — Soit S_0 le “simplexe fondamental” de sommets

$$[< e_1, \dots, e_{i-1}, \pi e_i, \dots, \pi e_n >] \quad 1 \leq i \leq n$$

Il est associé à $\forall i < j \ b_{ij} = 0$. Mais en fait $|S_0| = \{x \in Q \mid \alpha_{1n}(x) \leq 1\}$. Donc

$$Newt(S_0) = \{\lambda_1^{(2)} \leq \lambda_n\} = \{\frac{\lambda_1}{q^n} \leq \lambda_n\}$$

5.5. Lien avec l'espace de Lubin-Tate en niveau infini. —

Proposition 5.18. — Soit H un \mathcal{O} -module formel de dimension 1 sur \mathcal{O}_K . Supposons le muni d'une structure de niveau “infinie” $\eta : \mathcal{O}_F^n \xrightarrow{\sim} T_p(H)$. Soit S le simplexe de l'immeuble de $PGL(V_p(H))$ construit dans la section 2.5, S^\vee le simplexe dual dans l'immeuble de $PGL(V_p(H)^*)$ et $\eta^* S^\vee$ celui de l'immeuble de PGL_n via l'isomorphisme $(F^n)^* \xrightarrow{\sim} F^n$ donné par la base duale de la base canonique. Alors, si \mathcal{P} est le polygone de Newton associé à H et S' un simplexe maximal dans le quartier Q

$$\mathcal{P} \in Newt(S') \iff pr_Q(\eta^* S^\vee) \subset S'$$

où pr_Q désigne la projection de l'immeuble sur le quartier Q .

Démonstration. C'est une conséquence des résultats de la section 2.5. \square

5.6. Action simpliciale des opérateurs $(\pi^{-a_1}, \dots, \pi^{-a_n})$. —

Définition 5.19. — On note $x \mapsto (\pi^{a_1}, \dots, \pi^{a_n}).x$ l'action par translations sur \mathcal{A} qui à $[< \pi^{b_1} e_1, \dots, \pi^{b_n} e_n >]$ associe $[< \pi^{a_1+b_1} e_1, \dots, \pi^{a_n+b_n} e_n >]$.

Théorème 5.20. — Soit S un simplexe maximal dans Q et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$. Alors, l'opérateur $(\pi^{-a_1}, \dots, \pi^{-a_n})$ induit une bijection affine entre $\text{Newt}(S)$ et $\text{Newt}(\text{pr}_Q((\pi^{a_1}, \dots, \pi^{a_n}).S))$.

Démonstration. Soit $\mathcal{P} \in S$ un polygone de Newton de pentes $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. Supposons S associé aux $(b_{ij})_{i < j}$. Soit H un \mathcal{O} -module formel de dimension 1 ayant pour polygone de Newton associé \mathcal{P} . Soit (e_1, \dots, e_n) une base adaptée de $T_p(H)$. Soit $\varphi : H \rightarrow H/C = H'$ l'isogénie associée à (a_1, \dots, a_n) comme dans le corollaire 5.6. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation telle que

$$\lambda_{\sigma(1)}^{(a_{\sigma(1)})} \geq \dots \geq \lambda_{\sigma(n)}^{(a_{\sigma(n)})}$$

Posons pour tout $i < j$

$$b'_{ij} = a_{\sigma(j)} - a_{\sigma(i)} + b_{\sigma(i)\sigma(j)}$$

où on a posé $b_{\sigma(i)\sigma(j)} = -b_{\sigma(j)\sigma(i)}$ si $\sigma(i) > \sigma(j)$. Alors $\forall i < j$ $b'_{ij} \in \mathbb{N}$. En effet,

$$\begin{aligned} \text{si } \sigma(i) < \sigma(j) \quad & \lambda_{\sigma(i)}^{(b_{\sigma(i)\sigma(j)}+1)} \geq \lambda_{\sigma(j)} \geq \lambda_{\sigma(i)}^{(b_{\sigma(i)\sigma(j)}+2)} \\ \Rightarrow \quad & \lambda_{\sigma(i)}^{(a_{\sigma(j)}+b_{\sigma(i)\sigma(j)})} \geq \lambda_{\sigma(j)}^{(a_{\sigma(j)})} \geq \lambda_{\sigma(i)}^{(a_{\sigma(j)}+b_{\sigma(i)\sigma(j)}+1)} \\ \Rightarrow \quad & a_{\sigma(i)} \leq a_{\sigma(j)} + b_{\sigma(i)\sigma(j)} \\ \\ \text{si } \sigma(i) > \sigma(j) \quad & \lambda_{\sigma(j)}^{(b_{\sigma(j)\sigma(i)}+1)} \geq \lambda_{\sigma(i)} \geq \lambda_{\sigma(j)}^{(b_{\sigma(j)\sigma(i)}+2)} \\ & \lambda_{\sigma(j)}^{(a_{\sigma(i)}+b_{\sigma(j)\sigma(i)})} \geq \lambda_{\sigma(i)}^{(a_{\sigma(i)})} \geq \lambda_{\sigma(j)}^{(a_{\sigma(i)}+b_{\sigma(j)\sigma(i)}+1)} \\ \Rightarrow \quad & a_{\sigma(j)} \leq a_{\sigma(i)} + b_{\sigma(j)\sigma(i)} \end{aligned}$$

Donc, σ est l'unique élément du groupe de Weyl tel que si $S' = (\pi^{a_1}, \dots, \pi^{a_n}).S$ est le simplexe dans \mathcal{A} associé à la donnée $(b_{ij} + a_j - a_i)_{i < j}$ alors

$$\sigma.S' = \text{pr}_Q(S')$$

Comme dans la démonstration du théorème 5.10 on vérifie que si $\lambda'_1 \geq \dots \geq \lambda'_n$ sont les pentes associées à H' alors

$$\forall k \geq 1 \quad \lambda_i^{(k)} = \sum_{\substack{0 \leq k_j \leq a_{\sigma(j)} \\ 1 \leq j \leq n}} \prod_{1 \leq j \leq n} A(k_j) \inf\{\lambda_{\sigma(i)}^{(a_{\sigma(i)}+k)}\} \cup \{\lambda_{\sigma(j)}^{(k_j)} \mid j \neq i\}$$

Cette formule permet de démontrer facilement que

$$\forall i < j \quad \lambda_i^{(b'_{ij}+1)} \geq \lambda'_j \geq \lambda_i^{(b'_{ij}+2)}$$

De même elle permet de démontrer que sur S l'application qui à un polygone de pentes $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ associe celui de pentes $\lambda'_1 \geq \dots \geq \lambda'_n$ est affine. En effet, sur S les applications qui à $(\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n)$ associent les quantités $\inf\{\lambda_{\sigma(i)}^{(a_{\sigma(i)}+1)}\} \cup \{\lambda_{\sigma(j)}^{(k_j)} \mid j \neq i\}$ sont affines puisque l'ordre des $(\lambda_i^{(k)})_{1 \leq i \leq n, k \geq 1}$ y reste inchangé.

Reste à voir que l'opérateur $(\pi^{-a_1}, \dots, \pi^{-a_n})$ est un isomorphisme. Mais pour $N \geq \sup_i \{a_i\}$ sur S la composée des opérateurs $(\pi^{-a_1}, \dots, \pi^{-a_n})$ et $(\pi^{-(N-a_{\sigma(1)})}, \dots, \pi^{-(N-a_{\sigma(n)})})$ correspond au niveau des groupes de Lubin-Tate à $H \mapsto H/H[\pi^N]$ est donc l'identité. De même la composée sur S' des opérateurs $(\pi^{-(N-a_{\sigma(1)})}, \dots, \pi^{-(N-a_{\sigma(n)})})$ puis $(\pi^{-a_1}, \dots, \pi^{-a_n})$ est l'identité. \square

Remarque 5.21. — Le lecteur effrayé par le fait que l'opérateur $(\pi^{-a_1}, \dots, \pi^{-a_n})$ sur Newt agisse comme $(\pi^{a_1}, \dots, \pi^{a_n})$ sur l'appartement devrait penser au fait que dans l'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld l'action de $g \in \text{GL}_n(F)$ d'un coté est transformée en celle de ${}^t g$ de l'autre.

5.7. Définition des sommets. —

Définition 5.22. — Soit $x = [< \pi^{a_1}, \dots, \pi^{a_n} >]$ un sommet dans \mathcal{A} . On note $\mathcal{P}(x) = (\pi^{-a_1}, \dots, \pi^{-a_n}).\mathcal{P}_0$ où \mathcal{P}_0 est le polygone de Newton ayant une seule pente $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{q^n - 1}$.

Proposition 5.23. — Si $x = [< \pi^{a_1}, \dots, \pi^{a_n} >]$ alors $\mathcal{P}(x)$ est l'unique polygone de pentes $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ vérifiant

$$\forall i < j \quad \lambda_i^{(a_j - a_i + 1)} = \lambda_j$$

De plus

$$\forall i \quad \lambda_i = \frac{q^{a_i}}{q^n - 1} \sum_{\substack{0 \leq k_j \leq a_j \\ j \neq i}} \prod_{j \neq i} A(k_j) q^{-n(\sup(\{a_i + 1\} \cup \{k_j \mid j \neq i\}) - 1)}$$

où $A(k) = q^k - q^{k-1}$ si $k > 0$ et $A(0) = 1$.

Démonstration. Le fait que les pentes de $\mathcal{P}(x)$ vérifient les égalités annoncées résulte des formules données dans la section 5.3.2 ainsi que dans la démonstration du théorème 5.10.

La démonstration concernant l'unicité est laissée au lecteur. Il s'agit de vérifier qu'un certain système linéaire en les pentes $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ possède une unique solution ce qui ne pose pas de problème particulier. \square

Exemple 5.24. — Reprenons l'exemple 5.17. Le sommet $< e_1, \dots, e_n >$ correspond au polygone plat

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{q^n - 1}$$

et pour $1 \leq i \leq n - 1$ le sommet $< e_1, \dots, e_i, \pi e_{i+1}, \dots, \pi e_n >$ correspond au polygone

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_i = \frac{q^{n-i}}{q^n - 1}, \quad \lambda_{i+1} = \dots = \lambda_n = \frac{1}{q^i(q^n - 1)}$$

5.8. Définition des chambres comme enveloppe convexe de sommets. —

Proposition 5.25. — Soit S un simplexe maximal dans \mathcal{A} vu comme la collection de ses sommets. Alors $\text{Newt}(S)$ est l'enveloppe convexe des $\mathcal{P}(x)$, $x \in S$.

Démonstration. Soit S_0 le simplexe de sommets

$$\{ [< e_1, \dots, e_i, \pi e_{i+1}, \dots, \pi e_n >] \mid 1 \leq i \leq n \}$$

Il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $S = \text{proj}_Q((\pi^{-a_1}, \dots, \pi^{-a_n}).S_0)$. D'après le théorème 5.20 il suffit de démontrer le résultat pour S_0 .

On a $\text{Newt}(S_0) = \{ \frac{\lambda_1}{q^n} \leq \lambda_n \}$. Donc

$$\begin{aligned} \text{Newt}(S_0) &= \{ \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n > 0 \mid \sum_{i=1}^n (q^i - q^{i-1}) \lambda_i = 1 \text{ et } \frac{\lambda_1}{q^n} \leq \lambda_n \} \\ &\simeq \{ (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i=1}^n \mu_i = 1 \} \end{aligned}$$

où l'on a posé $\mu_i = q^i(\lambda_i - \lambda_{i+1})$ pour $1 \leq i \leq n - 1$ et $\mu_n = q^n \lambda_n - \lambda_1$ qui définit un changement de coordonnées affines. Dans ces nouvelles coordonnées le simplexe est le simplexe standard de \mathbb{R}_+^n . On vérifie alors que les sommets du simplexe standard dans ces coordonnées correspondent aux pentes des $\mathcal{P}(x)$, $x \in S_0$ telles que calculées dans l'exemple 5.24. \square

5.9. Définition des murs et demi-appartements. —

Définition 5.26. — Soit $b \in \mathbb{N}$ et M le mur du quartier Q égal à

$$\{x \in Q \mid \alpha_{ij}(x) = b\}$$

On définit alors un “mur” dans $Newt$ égal à

$$\{\mathcal{P} \in Newt \mid \lambda_i^{(b+1)} = \lambda_j\}$$

Soit les demi-appartements dans Q égaux à

$$\{x \in Q \mid \alpha_{ij}(x) \geq b\}$$

resp.

$$\{x \in Q \mid \alpha_{ij}(x) \leq b\}$$

On définit des “demi-appartements” associés dans $Newt$

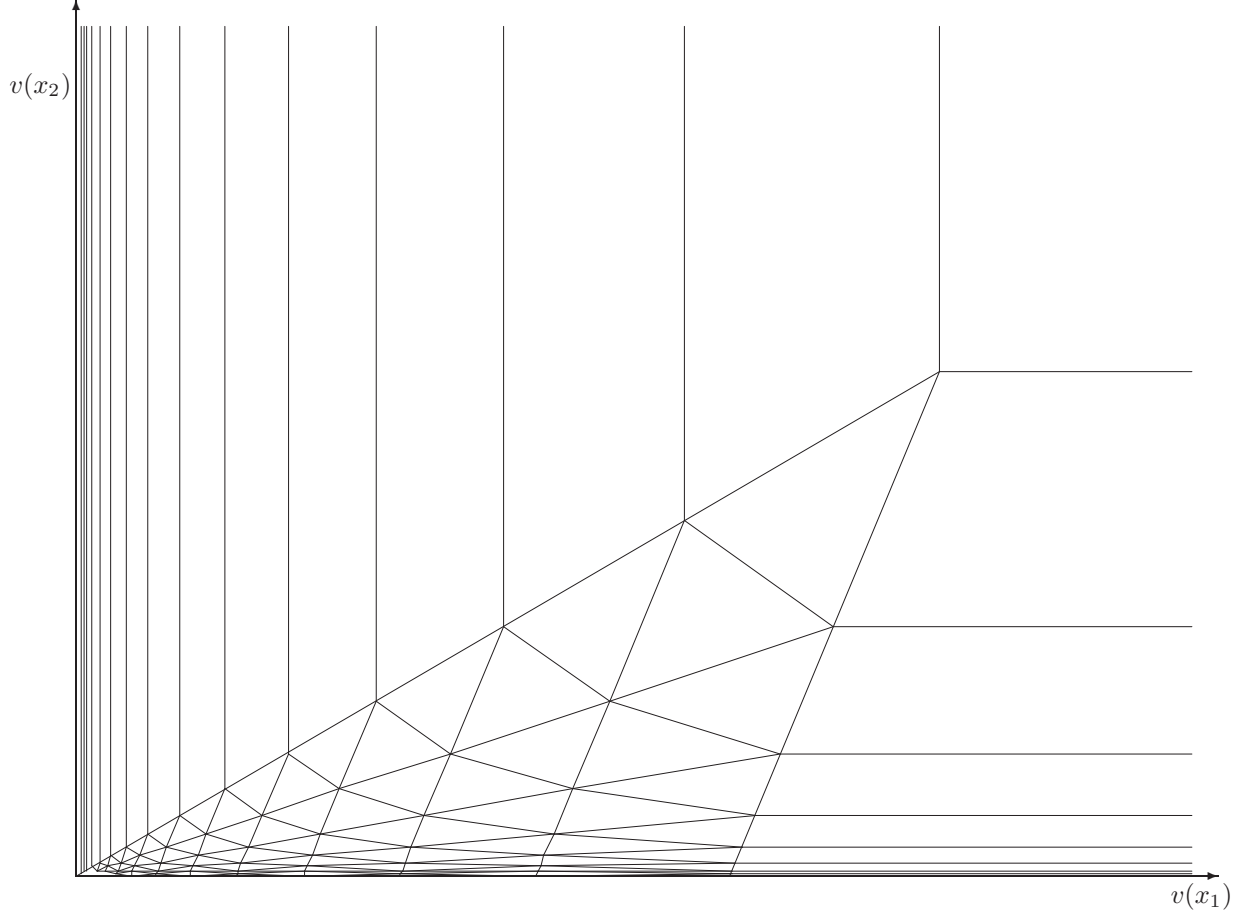
$$\{\mathcal{P} \in Newt \mid \lambda_i^{(b+1)} \geq \lambda_j\}$$

resp.

$$\{\mathcal{P} \in Newt \mid \lambda_i^{(b+1)} \leq \lambda_j\}$$

Ainsi avec les notations de la définition précédente si S est un simplexe maximal $Newt(S)$ est égal à l’intersection des demi-appartements le contenant. De même si x est un sommet de Q alors $\{\mathcal{P}(x)\}$ est égal à l’intersection des murs de $Newt$ contenant x .

Dans la figure ci-dessous on a dessiné l’image réciproque de la décomposition simpliciale de l’espace de Newton au squelette de l’espace de Lubin-Tate dans le cas de GL_3 . Ce squelette est l’ensemble des $(v(x_1), v(x_2)) \in]0, +\infty]^2$. La partie en haut à droite correspond à la zone où le polygone de Newton est plat. Les bandes horizontales et verticales correspondent à des zones où le polygone de Newton ne détermine par de façon unique $v(x_1)$ et $v(x_2)$. On voit dans ce dessin le quartier dont l’origine, le carré en haut à droite, correspond au polygone de Newton plat.

FIGURE 4. La décomposition simpliciale de la boule p -adique ouverte de dimension 2

6. L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld au niveau des squelettes après quotient par des sous-groupes compacts maximaux

Soient $|\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{LT},[0]}|$, resp. $|\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{Dr},[0]}|$, l'espace de Berkovich associé à l'espace de Lubin-Tate, resp. l'espace de Drinfeld, en niveau infini (cf. [7] pour les notations). Ces espaces topologiques sont munis d'une action de $\mathrm{GL}_n(F)^1 \times \mathcal{O}_D^\times$. D'après [7] il y a un homéomorphisme

$$|\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{LT},[0]}| \xrightarrow{\sim} |\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{Dr},[0]}|$$

qui transforme l'action de $(g, d) \in \mathrm{GL}_n(F)^1 \times \mathcal{O}_D^\times$ en $({}^t g, d)$. D'où en particulier

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) \times \mathcal{O}_D^\times \backslash |\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{LT},[0]}| & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) \times \mathcal{O}_D^\times \backslash |\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{Dr},[0]}| \\ \parallel & & \parallel \\ \mathcal{O}_D^\times \backslash |\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{LT},[0]}| & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) \backslash |\Omega| \end{array}$$

où $|\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{LT},[0]}|$ est l'espace topologique noté $|\mathfrak{X}^{an}|$ au début dans la section 5.1 et Ω l'espace symétrique de Drinfeld. Nous voulons décrire cette application au niveau des squelettes via la rétraction de ces espaces sur leur squelette :

$$\begin{array}{ccc} |\mathfrak{X}^{an}| & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) \backslash |\Omega| \\ \downarrow r & & \downarrow r \\ S(\mathfrak{X}^{an}) & \xrightarrow{\quad ? \quad} & \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) \backslash S(\Omega) \end{array}$$

où $S(\mathfrak{X}^{an})$ a été décrit dans la section 5.1, $S(\Omega) = |\mathcal{I}(F^n)|$ est la réalisation géométrique de l'immeuble de $\mathrm{PGL}_n(F)$ et la rétraction $r : |\Omega| \rightarrow S(\Omega) = |\mathcal{I}(F^n)|$ est l'application qui à $[F^n \hookrightarrow K] \in \Omega(K)$ associe la norme sur F^n déduite de la valuation sur K .

Rappelons (cf. section 5.1) qu'il y a une application \mathcal{O}_D^\times -invariante $S(\mathfrak{X}^{an}) \rightarrow \mathrm{Newt}$.

Théorème 6.1. — *Il y a une application*

$$S(\mathfrak{X}^{an}) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) \backslash S(\Omega)$$

faisant commuter le diagramme précédent. Soit Q le quartier de l'immeuble de $\mathrm{PGL}_n(F)$ dont les sommets sont les classes de réseaux $[< \pi^{a_1}e_1, \dots, \pi^{a_n}e_n >]$ où $a_1 \leq \dots \leq a_n$ et $(e_i)_i$ est la base canonique de F^n . Alors l'application précédente se factorise en

$$\begin{array}{ccc} S(\mathfrak{X}^{an}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) \backslash S(\Omega) \\ & \searrow & \nearrow \simeq \\ & \mathrm{Newt} \xrightarrow[\sim]{\psi} & Q \end{array}$$

où ψ est une bijection simpliciale affine par morceaux lorsque Newt est muni de la structure simpliciale définie précédemment. Plus précisément, pour tout sommet $x \in Q$ $\psi(\mathcal{P}(x)) = x$, pour toute chambre S dans Q $\psi(\mathrm{Newt}(S)) = S$ et

$$\psi|_{\mathrm{Newt}(S)} : \mathrm{Newt}(S) \xrightarrow{\sim} S$$

est affine.

Dans cette bijection les murs et demi-appartements de Newt tels que définis dans la section 5.9 correspondent à ceux du quartier Q .

De plus dans cette bijection l'action de l'opérateur $(\pi^{-a_1}, \dots, \pi^{-a_n}) : \mathrm{Newt} \rightarrow \mathrm{Newt}$ correspond à l'opérateur composé

$$Q \hookrightarrow |\mathcal{A}| \xrightarrow{(\pi^{a_1}, \dots, \pi^{a_n})} |\mathcal{A}| \xrightarrow{\mathrm{pr}_Q} Q$$

où $|\mathcal{A}| \xrightarrow{(\pi^{a_1}, \dots, \pi^{a_n})} |\mathcal{A}|$ est une translation dans la partie vectorielle du groupe de Weyl affine sur l'appartement et pr_Q est la projection de l'appartement sur le quartier, obtenue par application d'éléments du groupe de Weyl vectoriel \mathfrak{S}_n , $Q = \mathfrak{S}_n \backslash |\mathcal{A}|$.

Démonstration. L'application $|\mathfrak{X}^{an}| \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) \backslash |\Omega|$ se décrit de la façon suivante : soit $K|F$ et H un \mathcal{O} -module formel de dimension 1 sur \mathcal{O}_K . Soit l'application de Hodge-Tate de H^\vee tordue, $\alpha_{H^\vee}^\mathcal{O}(-1) : T_p(H)^* \rightarrow \omega_H \otimes K(-1)$. Fixons un isomorphisme $\mathcal{O}_F^n \xrightarrow{\sim} T_p(H)^*$. Alors le point de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) \backslash \Omega(K)$ associé est la $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ -orbite de $[\mathcal{O}_F^n \xrightarrow{\sim} T_p(H)^* \hookrightarrow \omega_H \otimes K(-1)] \in \Omega(K)$. Le point dans $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) \backslash |\mathcal{I}(F^n)|$ associé est obtenu en prenant la norme associée sur F^n .

Les résultats des sections 2 et 4 montrent que cette application se factorise par $|\mathfrak{X}^{an}| \rightarrow \mathrm{Newt}$ (le polygone de Newton détermine la filtration de ramification inférieure dans un quartier de l'immeuble et celle-ci détermine le point de Hodge-Tate associé dans $|\mathcal{I}(V_p(H)^*)|$). Soit $\psi : \mathrm{Newt} \rightarrow Q$ cette application factorisée.

Rappelons qu'on a défini une action par translations sur l'appartement associé à la base canonique de F^n (cf. définition 5.19). Montrons que $\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N} \forall \mathcal{P} \in \mathrm{Newt}$ $\psi((\pi^{-a_1}, \dots, \pi^{-a_n}).\mathcal{P}) = \mathrm{pr}_Q((\pi^{a_1}, \dots, \pi^{a_n}).\psi(\mathcal{P}))$ où pr_Q est la projection de l'appartement sur le quartier.

Le morphisme $|\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}T}| \rightarrow |\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}r}|$ transforme l'action de $g \in \mathrm{GL}_n(F)$ en ${}^t g^{-1}$. Il existe donc $\tau \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\psi((\pi^{-a_1}, \dots, \pi^{-a_n}).\mathcal{P}) = \mathrm{pr}_Q((\pi^{a_{\tau(1)}}, \dots, \pi^{a_{\tau(n)}}).\psi(\mathcal{P}))$.

Mais si H sur \mathcal{O}_K a pour polygone \mathcal{P} et $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ est une base adaptée de $T_p(H)$ de base duale $(\epsilon_1^*, \dots, \epsilon_n^*)$ alors d'après la proposition 4.6 le point de Hodge-Tate associé est dans un simplexe S dans le quartier $\{[< \pi^{b_1}\epsilon_1^*, \dots, \pi^{b_n}\epsilon_n^* >] \mid b_1 \leq \dots \leq b_n\}$. Si $f : H \rightarrow H'$ est l'isogénie associée à (a_1, \dots, a_n) et $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ comme dans le corollaire 5.6 alors il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que si $f_* : T_p(H) \hookrightarrow T_p(H')$ $(f_*\pi^{-a_{\sigma(1)}}e_1, \dots, f_*\pi^{-a_{\sigma(n)}}e_n)$ soit une base adaptée de $T_p(H')$. De plus, d'après le théorème 5.20, σ est un élément du groupe de Weyl vérifiant $\sigma.((\pi^{a_1}, \dots, \pi^{a_n}).\mathrm{proj}_Q(S)) = \mathrm{pr}_Q((\pi^{a_1}, \dots, \pi^{a_n}).\mathrm{proj}_Q(S))$ où $\mathrm{proj}_Q : |\mathcal{I}(F^n)| \rightarrow Q$ et pr_Q est la

restriction de proj_Q à l'appartement. D'où le résultat.

D'après le théorème 5.20 il suffit donc maintenant de montrer que si S_0 est la chambre de sommets

$$\{ \langle e_1, \dots, e_i, \pi e_{i+1}, \dots, \pi e_n \rangle \mid 1 \leq i \leq n \}$$

alors ψ induit un isomorphisme affine entre $\text{Newt}(S_0)$ et S_0 . Il suffit pour cela de montrer que ψ restreinte à S_0 est une application affine. En effet, supposons le vérifié. Alors d'après l'exemple 4.8 si 0 désigne le sommet de Q alors $\psi(\mathcal{P}(0)) = 0$. Donc, d'après la compatibilité de ψ aux opérateurs $(\pi^{-a_1}, \dots, \pi^{-a_n})$ pour tout sommet x de S_0 , $\psi(\mathcal{P}(x)) = x$ ce qui implique d'après la proposition 5.25 que $\psi|_{\text{Newt}(S_0)}$ est un isomorphisme entre $\text{Newt}(S_0)$ et S_0 .

Montrons donc que $\psi|_{\text{Newt}(S_0)}$ est affine. Pour un H sur \mathcal{O}_K notons $(\epsilon_{1,H}, \dots, \epsilon_{n,H})$ une base adaptée de $T_p(H)$ et $\|\cdot\|_H$ désigne la norme additive associée sur $T_p(H)^*$. Il suffit alors de montrer que l'application qui à un polygone de Newton \mathcal{P} associe $\|\epsilon_{i,H}^*\|_H$ est affine en restriction à $\text{Newt}(S_0)$. Mais on vérifie directement avec le théorème 1.11 que cette application est

$$\mathcal{P} \mapsto \frac{q}{q-1} (1 - (\mathcal{P}(q^i) - \mathcal{P}(q^{i-1})))$$

□

7. Quelques applications

7.1. Sous-groupes canoniques généralisés. — Soit $K|F$ un corps valué complet pour une valuation $v : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ prolongeant celle de F . Soit H un \mathcal{O} -module formel de dimension 1 et hauteur n sur \mathcal{O}_K .

Définition 7.1. — Un sous-groupe canonique de rang r et niveau k est un sous $\mathcal{O}_F/\pi^k \mathcal{O}_F$ module

$$M \subset H[\pi^k][\mathcal{O}_{\overline{K}}]$$

libre de rang r vérifiant

$$\forall x \in M \forall y \in H[\pi^k][\mathcal{O}_{\overline{K}}] \setminus M \quad v(x) > v(y)$$

S'il existe, un tel sous-groupe est unique ; il s'agit en effet d'un cran de la filtration de ramification inférieure sur $H[\pi^k][\mathcal{O}_{\overline{K}}]$ égal à l'ensemble des q^{kr} -éléments de plus grande valuation dans $H[\pi^k][\mathcal{O}_{\overline{K}}]$. Son unicité implique qu'il est stable sous $\text{Gal}(\overline{K}|K)$ et définit donc un sous-groupe étale de $H[\pi^k] \otimes_{\mathcal{O}_K} K$.

Lemme 7.2. — Soit $\mathcal{P} \in \text{Newt}$ le polygone de Newton associé à H . Le groupe H possède un sous-groupe canonique de rang r et niveau k ssi \mathcal{P} appartient au demi-appartement de Newt associé au demi-appartement ouvert du quartier Q défini par

$$\{x \in Q \mid \alpha_{r,r+1}(x) > k - 1\}$$

Démonstration. D'après les résultats de la section 2 l'existence d'un tel sous-groupe canonique est équivalente à l'inégalité $\lambda_r^{(k)} > \lambda_{r+1}$. □

Remarque 7.3. — En particulier l'existence d'un sous-groupe canonique de rang et niveau donné peut se lire sur l'application de Hodge-Tate de H^\vee .

Remarque 7.4. — L'image réciproque dans l'espace de Lubin-Tate \mathfrak{X}^{rig} d'un demi-appartement ouvert définit un ouvert admissible de la boule ouverte.

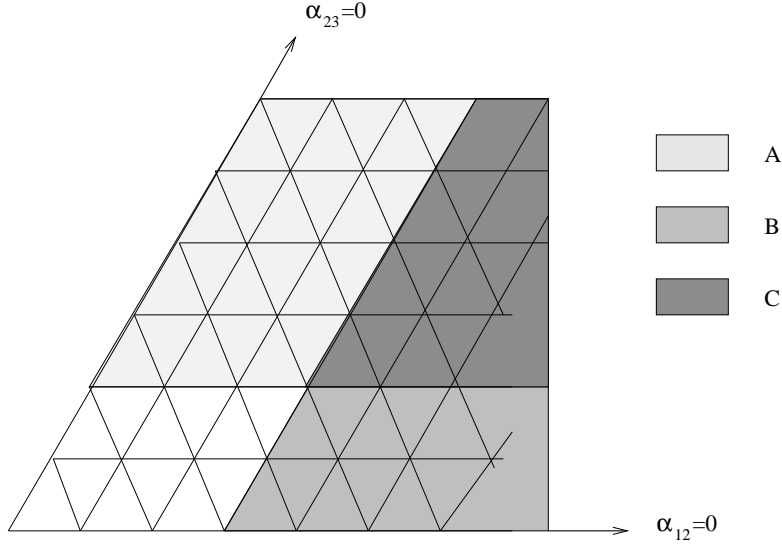


FIGURE 5. Demi-appartement $A = \exists$ sous-groupe canonique de rang 2 et niveau 3, $B = \exists$ sous-groupe canonique de rang 1 et niveau 4, $C = A \cap B$

Corollaire 7.5. — Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ $\exists \epsilon, 0 < \epsilon < 1$, et des ouverts admissibles $(U_i^{(k)})_{1 \leq i \leq n-1}$ dans l'espace de Lubin-Tate \mathfrak{X}^{rig} tels que

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} U_i^{(k)} \right)^c \subset \mathbb{B}(0, \epsilon)$$

et $\forall x \in U_i^{(k)}$ le groupe p -divisible universel spécialisé en x possède un sous-groupe canonique de rang i et niveau k .

Démonstration. Il suffit de vérifier que dans le quartier Q pour $k \in \mathbb{N}^*$

$$Q \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq n-1} \{x \in Q \mid \alpha_{i,i+1}(x) > k-1\}$$

est un compact dans Q et l'application $|\mathfrak{X}^{an}| \rightarrow Newt$ est propre. \square

On remarquera également le lemme suivant.

Lemme 7.6. — Les assertions suivantes sont équivalentes :

- H possède un sous-groupe canonique de rang r et niveau k
- H possède un sous-groupe canonique de rang r et niveau 1 et si $H[\pi]^\mu \subset H[\pi]$ est le cran de la filtration de ramification supérieure associé, $H[\pi^k]^\mu(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ est libre de rang r sur $\mathcal{O}/\pi^k \mathcal{O}$

Ainsi si c'est le cas $\forall 1 \leq k' \leq k$ $H[\pi^{k'}]^\mu(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ est un sous-groupe canonique de rang r et niveau k' et il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow H[\pi^{k'}]^\mu(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \longrightarrow H[\pi^k]^\mu(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \xrightarrow{\times \pi^{k'}} H[\pi^{k-k'}]^\mu(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \longrightarrow 0$$

Démonstration. Elle ne pose pas de problème. \square

7.2. Orbites de Hecke. —

Lemme 7.7. — Soit $H_1 \rightarrow H_2$ une isogénie de \mathcal{O} -modules formels de dimension 1. Soient $\mathcal{P}_1 \in Newt$, resp. $\mathcal{P}_2 \in Newt$, les polygones de Newton associés à H_1 , resp. H_2 . Il existe alors $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $\mathcal{P}_2 = (\pi^{-a_1}, \dots, \pi^{-a_n}). \mathcal{P}_1$.

Démonstration. Toute isogénie peut s'écrire comme une composée d'isogénies cycliques c'est à dire de noyau engendré par un point de π -torsion non-nul. Pour une isogénie cyclique le résultat découle de la proposition 5.5. Le cas général est donc une conséquence du corollaire 5.11. \square

Définition 7.8. — Soit \mathfrak{X} l'espace de Lubin-Tate et $x \in |\mathfrak{X}^{an}|$. Soit H le groupe p -divisible universel sur \mathfrak{X} , K algébriquement clos tel que x provienne d'un élément $x' \in \mathfrak{X}(\mathcal{O}_K)$ et $H_{x'}$ la spécialisation sur \mathcal{O}_K de H . On appelle orbite de Hecke de x le sous-ensemble de $|\mathfrak{X}^{an}|$ associé aux $y' \in \mathfrak{X}(\mathcal{O}_K)$ tels qu'il existe une isogénie $H_{x'} \rightarrow H_{y'}$.

Remarque 7.9. — L'orbite de Hecke d'un point est un sous-ensemble \mathcal{O}_D^\times -invariant.

Proposition 7.10. — Soit $x \in |\mathfrak{X}^{an}|$. L'image dans *Newt* de l'orbite de Hecke de x ne dépend que de l'image de x dans *Newt*. Via l'isomorphisme $\text{Newt} \xrightarrow{\sim} Q$ (où Q est le quartier de l'immeuble défini dans les section précédentes) cette image est l'orbite du point associé à x dans Q sous le groupe de Weyl affine (c'est à dire les points de l'orbite dans l'appartement qui sont dans Q).

Démonstration. Soit \mathcal{A} l'appartement et $\text{pr}_Q : \mathcal{A} \rightarrow Q$ la projection. Soit $y \in Q$ le point associé à x . D'après le lemme précédent l'image de l'orbite de Hecke de x dans Q est égale à l'ensemble des

$$\text{pr}_Q(t.Q)$$

où t parcourt les translations dans le groupe de Weyl affine. Donc cette orbite est $W_{\text{aff}}.y \cap Q$. \square

7.3. Domaines fondamentaux pour l'action des correspondances de Hecke. — Dans cette section nous montrons comment construire des domaines fondamentaux généralisant le domaine fondamental de Gross-Hopkins utilisé dans [5].

L'orbite dans l'appartement \mathcal{A} d'un point $y \in Q$ sous le groupe de Weyl affine admet la description suivante. Soit $\epsilon : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ un étiquetage des sommets de \mathcal{A} donnée par $[\Lambda] \mapsto [\Lambda_0 : \Lambda] \bmod n$ où Λ_0 est un réseau fixé. Si S est une chambre de \mathcal{A} (un simplexe maximal) on note $W(S) \subset \text{Aut}(S)$ le groupe des rotations de S de centre le barycentre de $|S|$, isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, défini par

$$W(S) = \{f \in \text{Aut}(S) \mid \exists a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \forall s \in S \epsilon(f(s)) = \epsilon(s) + a\}$$

Alors,

$$W(S) = \text{Stab}_{W_{\text{aff}}}(S)$$

Soit donc maintenant $x \in |\mathcal{A}|$ et S_0 une chambre telle que $x \in |S_0|$. Soit S une autre chambre dans \mathcal{A} . Fixons un isomorphisme

$$\alpha : S_0 \xrightarrow{\sim} S$$

tel que

$$\exists b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \forall s \in S_0 \epsilon(\alpha(s)) = \epsilon(s) + b$$

Alors, si $|\alpha| : |S_0| \xrightarrow{\sim} |S|$, on a

$$W_{\text{aff}}.x \cap |S| = W(S).|\alpha|(x) = |\alpha|(W(S_0).x)$$

De là on déduit la proposition suivante

Proposition 7.11. — Soit S une chambre du quartier Q et $D \subset |S|$ un sous-ensemble tel que $W(S).D = |S|$. Supposons que D est un polyèdre rationnel dans le simplexe $|S|$, c'est à dire défini par des inégalités linéaires à coefficients rationnels en coordonnées barycentriques dans $|S|$. Alors, l'image réciproque à $|\mathfrak{X}^{an}|$ de D définit un domaine analytique fermé \mathcal{D} dans \mathfrak{X}^{an} associé à un ouvert admissible de \mathfrak{X}^{rig} tel que pour tout K et $x \in \mathfrak{X}^{an}(K)$ il existe $K'|K$ finie, $y \in \mathcal{D}(K')$ et une isogénie $H_x \rightarrow H_y$. En d'autres termes les itérés de \mathcal{D} par les opérateurs de Hecke sphériques recouvrent \mathfrak{X}^{an} .

Le problème est maintenant de comprendre comment se recollent les itérés d'un tel domaine \mathcal{D} sous l'action des correspondances de Hecke. Cela peut se faire dans le simplexe fondamental du quartier comme dans la section 3 de [5].

Soit $S_0 = \text{convexe}(0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1})$ le simplexe de Q de sommets

$$0 = \langle e_1, \dots, e_n \rangle, \quad \omega_i = \langle e_1, \dots, e_i, \pi e_{i+1}, \dots, \pi e_n \rangle \quad 1 \leq i \leq n-1$$

Soit

$$\tilde{S}_0 = S_0 \setminus \text{convexe}(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) = S_0 \setminus \{\alpha_{1n} = 1\}$$

le simplexe privé du mur $\alpha_{1n} = 1$. L'image réciproque à $Newt$ de \tilde{S}_0 est

$$Newt(\tilde{S}_0) = \left\{ \frac{\lambda_1}{q^n} < \lambda_n \right\}$$

Voici une généralisation de la proposition 3.5 de [5].

Proposition 7.12. — Soient $x, y \in \mathfrak{X}^{an}(K)$ tels que les polygones de Newton associés appartiennent à $Newt(\tilde{S}_0)$ et $\varphi : H_x \rightarrow H_y$ une isogénie ne se factorisant pas par π . Alors $\ker \varphi \subset H_x[\pi]$ et si $\dim_{\mathbb{F}_q} \ker \varphi = r$ $\ker \varphi$ est un sous-groupe canonique de rang r et niveau 1.

Démonstration. Soit $M = \ker \varphi$. Soient $\mu_1 > \dots > \mu_r$ les pentes du polygone de Newton associé à H_x . On a des inclusions

$$M[\pi^k]/M[\pi^{k-1}] \xrightarrow{\times \pi^{k-1}} M[\pi] \hookrightarrow H[\pi]$$

De plus

$$\forall a \in M[\pi^k] \setminus M[\pi^{k-1}] \quad \forall b \in M[\pi^{k-1}] \quad v(a) < v(b)$$

Posons

$$\forall i, 1 \leq i \leq r, \forall k \geq 1 \quad d_i^{(k)} = \dim_{\mathbb{F}_q} (\pi^{k-1} M[\pi^k] \cap \text{Fil}_{\mu_i} M[\pi])$$

où l'on pose $\text{Fil}_\lambda = \{a \mid v(a) \geq \lambda\}$. On a donc $d_1^{(k)} \geq \dots \geq d_r^{(k)}$ et $\forall i \quad d_i^{(k)} \geq d_i^{(k+1)}$. Les valuations des éléments non-nuls de M sont

$$\left\{ \frac{\mu_i}{q^{nk}} \mid k \geq 1, 1 \leq i \leq r, d_i^{(k)} \neq 0 \right\}$$

et

$$\forall i, k \quad \text{long}(\text{Fil}_{\frac{\mu_i}{q^{nk}}} M) = d_i^{(k)} |M[\pi^{k-1}]|$$

Soit (e_1, \dots, e_n) une base adaptée de $T_p(H)$. Il est alors aisé de vérifier qu'il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que si $N = \langle \pi^{-a_1} \bar{e}_1, \dots, \pi^{-a_n} \bar{e}_n \rangle \subset H_x[\pi^\infty]$ alors $M \simeq N$ comme groupes abstraits et

$$\forall \mu \quad \text{long Fil}_\mu N = \text{long Fil}_\mu M$$

Il suffit pour cela de choisir les $(a_i)_i$ tels que

$$\forall i, k \quad |\{j \mid v(\pi^{-1} e_j) \geq \mu_i \text{ et } a_j \geq k\}| = d_i^{(k)}$$

Soient donc $\mathcal{P}_x, \mathcal{P}_y \in Newt$ les polygones de Newton de H_x , resp. H_y . On a donc d'après la proposition 5.5

$$\mathcal{P}_y = (\pi^{-a_1}, \dots, \pi^{-a_n}). \mathcal{P}_x$$

Mais il est aisé de vérifier que

$$\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n \quad \inf\{a_i\} = 0 \quad \text{pr}_Q((\pi^{a_1}, \dots, \pi^{a_n}).\tilde{S}_0) \cap \tilde{S}_0 \implies \exists i \quad (a_1, \dots, a_n) = (\underbrace{1, \dots, 1}_i, 0, \dots, 0)$$

De plus si $u \in \tilde{S}_0$ vérifie

$$\text{pr}_Q(\underbrace{(\pi, \dots, \pi)}_i, 1, \dots, 1).u \in \tilde{S}_0$$

alors $\alpha_{i,i+1}(u) \neq 0$ et on conclut facilement. \square

Corollaire 7.13 (Généralisation du domaine fondamental de Gross-Hopkins)

Soit S_0 le simplexe maximal du quartier Q contenant l'origine. Soit D un polyèdre rationnel dans $|S_0|$ tel que $D \subset |\tilde{S}_0|$ c'est à dire D ne rencontre pas le mur $\{\alpha_{1n} = 1\}$. Supposons que

$$|S_0| = W(S_0).D$$

où $W(S_0) = \text{Stab}_{W_{\text{aff}}}(S_0)$. Notons $\forall \sigma \in W(S_0) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $\partial_\sigma D = D \cap \sigma.D$. Soit \mathcal{D} l'image réciproque à $|\mathfrak{X}^{an}|$ de D et $\forall s \in W(S_0)$ $\partial_\sigma \mathcal{D}$ celle de $\partial_\sigma D$. Ce sont des domaines analytiques fermés associés à des ouverts admissibles de \mathfrak{X}^{rig} . De plus les itérés de \mathcal{D} sous les correspondances de Hecke sphériques forment un recouvrement admissible de \mathfrak{X}^{rig} . Les itérés de \mathcal{D} ayant une intersection non-vides avec \mathcal{D} sont associés aux correspondances de Hecke $(\underbrace{\pi^{-1}, \dots, \pi^{-1}}_i, 1, \dots, 1)$

avec $1 \leq i \leq n-1$. Ces intersections sont les $\partial_\sigma \mathcal{D}$ et les relations de faces sont obtenues par quotient par un sous-groupe canonique généralisé dans les points de π -torsion.

Corollaire 7.14. — Pour tout domaine fondamental \mathcal{D} comme dans le corollaire précédent on peut refaire la construction de [5] : on peut reconstruire la tour de Lubin-Tate en niveau infini à partir d'un tel domaine fondamental.

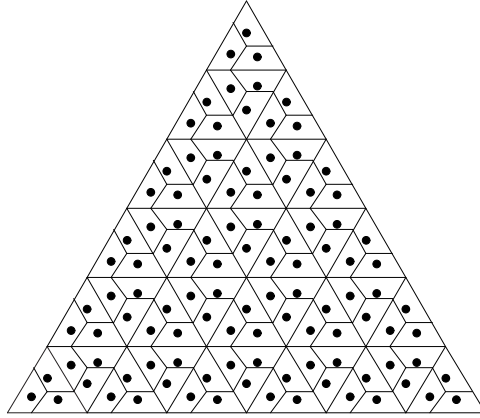


FIGURE 6. Une décomposition simpliciale du quartier relativement à un domaine fondamental pour l'action des correspondances de Hecke et une orbite de Hecke (points noirs)

7.4. L'image du domaine fondamental de Gross-Hopkins dans l'espace de Drinfeld.

— Soit

$$\mathcal{D} = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathfrak{X}^{an} \mid \forall i \ v(x_i) \geq 1 - \frac{i}{n}\}$$

le domaine fondamental de Gross-Hopkins ([8], [5]). Si pour $x \in \mathfrak{X}^{an}$ on note $\mathcal{P}_x \in \text{Newt}$ le polygone de Newton correspondant et si \mathcal{P}_{GH} désigne le polygone défini par $\forall i \ v(x_i) = 1 - \frac{i}{n}$ alors

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathfrak{X}^{an} \mid \mathcal{P}_x \geq \mathcal{P}_{GH}\}$$

et \mathcal{D} est donc l'image réciproque dans \mathfrak{X}^{an} de l'ensemble

$$D = \{\mathcal{P} \mid \mathcal{P} \geq \mathcal{P}_{GH}\}$$

On se propose de calculer l'image de ce domaine fondamental de Gross-Hopkins dans l'espace de Drinfeld via l'isomorphisme entre les deux tours.

Proposition 7.15. — *L'ensemble convexe $D \subset \text{Newt}$ est un polytope possédant 2^{n-1} points extrémaux en bijection avec les parties $A \subset \{1, \dots, n-1\}$. À $A = \emptyset$ est associé le polygone plat \mathcal{P}_\emptyset défini par*

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{q^n - 1}$$

Pour $A \neq \emptyset$ si $A = \{i_1 < \dots < i_r\}$ le polygone associé \mathcal{P}_A est défini par

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{i_1}, \lambda_{i_1+1} = \dots = \lambda_{i_2}, \dots, \lambda_{i_{r-1}+1} = \dots = \lambda_{i_r}$$

$$\text{et } \forall k \in \{1, \dots, r\} \quad v(x_{i_k}) = 1 - \frac{i_k}{n}$$

Ainsi $\mathcal{P}_{\{1, \dots, n\}} = \mathcal{P}_{GH}$. On a donc

$$D = \text{Convexe}(\mathcal{P}_A)_{A \subset \{1, \dots, n-1\}}$$

Proposition 7.16. — *Soit pour tout i , $1 \leq i \leq n-1$, le sommet $\omega_i = \langle e_1, \dots, e_i, \pi e_{i+1}, \dots, \pi e_n \rangle$, $\mathcal{P}(\omega_i) \in \text{Newt}$ le polygone associé (cf. exemple 5.24) et \mathcal{P}_0 le polygone “plat” associé au sommet $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$. Alors $\forall A = \{i_1 < \dots < i_r\} \subset \{1, \dots, n-1\}$, avec les notations de la proposition précédente,*

$$\mathcal{P}_A \in \text{Convexe}(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}(\omega_{i_1}), \dots, \mathcal{P}(\omega_{i_r}))$$

plus précisément

$$\mathcal{P}_A = a_0 \mathcal{P}_0 + \sum_{k=1}^r a_k \mathcal{P}(\omega_{i_k})$$

où

$$\forall k \neq 0 \quad a_k = \frac{q^{i_k}}{n} \left(\frac{i_k - i_{k-1}}{q^{i_k} - q^{i_{k-1}}} - \frac{i_{k+1} - i_k}{q^{i_{k+1}} - q^{i_k}} \right)$$

où l'on a posé $i_0 = 0$, $i_n = n$, et

$$a_0 = 1 - \sum_{k \neq 0} a_k$$

En particulier

$$\mathcal{P}_{\{1, \dots, n\}} = \frac{1}{n} \left(\mathcal{P}_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{P}(\omega_i) \right)$$

Corollaire 7.17. — *L'image du domaine fondamental de Gross-Hopkins dans le simplexe fondamental est l'enveloppe convexe de l'origine $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ et des*

$$a_0 \langle e_1, \dots, e_n \rangle + \sum_{k=1}^r a_k \omega_{i_k}$$

où $\{i_1 < \dots < i_r\} \subset \{1, \dots, n\}$ et les $(a_i)_i$ sont comme dans la proposition précédente. Le sommet correspondant à $\{i_1 < \dots < i_r\} = \{1, \dots, n\}$ est le barycentre du simplexe.

La bijection de [7] induit une bijection entre les points de la tour de Lubin-Tate en niveau infini au dessus du domaine fondamental de Gross-Hopkins et ceux de la tour de Drinfeld en niveau infini au dessus d'un point de Ω s'envoyant dans le polytope précédent via l'application quotient $|\Omega| \rightarrow |\mathcal{I}(\text{PGL}_n)| \rightarrow \text{GL}_n(\mathcal{O}_F) \backslash |\mathcal{I}(\text{PGL}_n)| = \mathcal{Q}$.

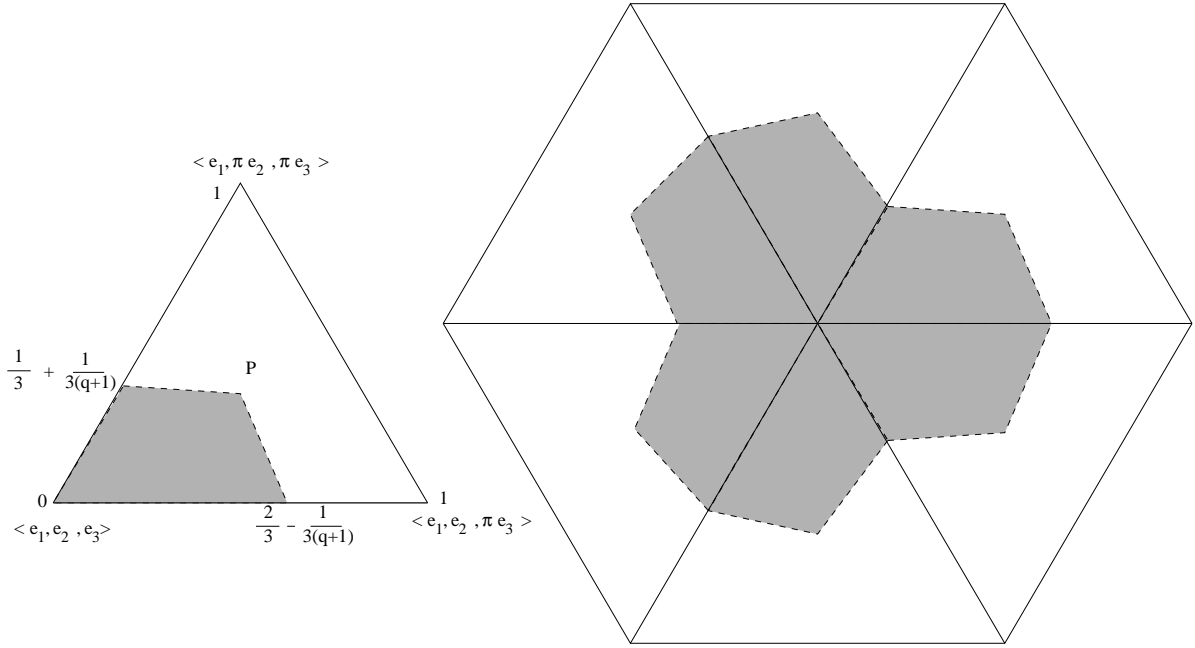


FIGURE 7. L'image du domaine fondamental de Gross-Hopkins dans le "simplexe fondamental" du quartier et son image dans l'appartement

7.5. Application au morphisme des périodes. — L'application des périodes de Gross-Hopkins a été étudiée en détails dans [12]. Dans cette section on explique comment obtenir de nouveau les résultats de [12] à partir des calculs de la section 2 de [7].

Commençons par remarquer avec les notations de la section 7.3 que si S_0 est le simplexe fondamental dans le quartier Q et \tilde{S}_0 désigne S_0 privé du mur $\{\alpha_{1n} = 0\}$ alors

$$\forall x \in |\tilde{S}_0| \quad \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n \setminus \mathbb{N} \cdot (1, \dots, 1) \quad n \mid \sum_{i=1}^n a_i \implies (\pi^{a_1}, \dots, \pi^{a_n}) \cdot x \notin |\tilde{S}_0|$$

et que donc si $U \subset \mathfrak{X}^{an}$ désigne l'image réciproque dans l'espace de Lubin-Tate de $|\tilde{S}_0|$

$$U = \left\{ \frac{\lambda_1}{q^n} < \lambda_n \right\}$$

pour toute correspondance de Hecke T non-triviale de degré un multiple de n on a $T.U \cap U = \emptyset$. On vient donc de donner une démonstration géométrique sur l'immeuble de la proposition 4.2 de [5]. On en déduit comme dans la section 4 de [5] que l'application des périodes de Gross-Hopkins $\tilde{\pi} : \mathfrak{X}^{an} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ induit un isomorphisme entre U et son image.

Intéressons-nous maintenant aux propriétés "métriques" de l'application des périodes. On sait d'après le théorème 2.3 de [5] que si $\tilde{\pi} = [f_0 : \dots : f_{n-1}]$ alors

$$\forall \underline{x} \in U \quad v \left(\frac{f_i(\underline{x})}{f_0(\underline{x})} \right) = v(x_i)$$

Mais maintenant si $y \in Q \exists (a_1, \dots, a_n) \quad (\pi^{a_1}, \dots, \pi^{a_n}) \cdot y \in |\tilde{S}_0|$. De cela on déduit que l'on a des estimations sur la position $\tilde{\pi}(x)$ pour $x \in \mathfrak{X}^{an}$ en fonction de l'image de x dans le quartier Q . En effet, si $y \in Q$ correspond à x alors si $z = (\pi^{a_1}, \dots, \pi^{a_n}) \cdot y \in |\tilde{S}_0|$ on a une estimation sur la position de $\Pi^{\sum_i a_i} \cdot \tilde{\pi}(x)$ à un élément de \mathcal{O}_D^\times près où Π est une uniformisante de l'algèbre à division D .

On peut par exemple déduire de tout cela que si S est un simplexe de Q et $U(|S|) \subset \mathfrak{X}^{an}$ le domaine analytique fermé de l'espace de Lubin-Tate associé alors $\tilde{\pi}(U(|S|)) = \mathbb{P}^{n-1}$. De même on vérifie que l'application $\tilde{\pi}$ restreinte à l'ouvert $U(|\dot{S}|)$ est finie, et on peut calculer son degré.

Nous laissons au lecteur la liberté de trouver d'autres applications.

8. Le cas des espaces de Lubin-Tate en niveau Iwahori

Nous avons précédemment étudié l'isomorphisme au niveau des squelettes induit par l'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et Drinfeld après quotient par $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) \times \mathcal{O}_D^\times$. Nous allons faire de même après quotient par $I \times \mathcal{O}_D^\times$ où I désigne un sous-groupe d'Iwahori.

Rappelons que si $(e_1; \dots, e_n)$ désigne la base canonique de F^n alors \mathcal{A} est l'appartement de sommets

$$[\langle \pi^{a_1} e_1, \dots, \pi^{a_n} e_n \rangle], (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$$

Q le quartier de sommets

$$[\langle \pi^{a_1} e_1, \dots, \pi^{a_n} e_n \rangle] \quad a_1 \leq \dots \leq a_n$$

et S_0 le "simplexe fondamental" de sommets

$$[\langle e_1, \dots, e_n \rangle], [\langle e_1, \dots, e_i, \pi e_{i+1}, \dots, \pi e_n \rangle] \quad 1 \leq i \leq n-1$$

Soit I le sous-groupe d'Iwahori associé au simplexe S_0

$$I = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) \mid g \bmod \pi = \begin{pmatrix} \times & 0 & 0 \\ \times & \ddots & 0 \\ \times & \times & \times \end{pmatrix}\}$$

Soit I^{opp} le sous-groupe d'Iwahori

$$I^{opp} = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) \mid g \bmod \pi = \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \ddots & \times \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix}\}$$

Soit \mathcal{Y} le schéma formel sur $\mathrm{Spf}(\check{\mathcal{O}})$ classifiant les classes d'isomorphismes d'objets

$$(H_1 \xrightarrow{\varphi_1} H_2 \xrightarrow{\varphi_2} \dots \longrightarrow H_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} H_n \xrightarrow{\varphi_n} H_1, \rho)$$

où (H_1, ρ) est dans l'espace de Lubin-Tate sans niveau (ρ étant la déformation), $\forall i \quad \varphi_i : H_i \longrightarrow H_{i+1}$ est une isogénie de degré q entre \mathcal{O} -modules formels et $\varphi_n \circ \dots \circ \varphi_1 = \pi$. Le schéma formel \mathcal{Y} est un modèle entier de l'espace de Lubin-Tate en niveau I^{opp} . Le morphisme d'oubli de la structure de niveau est

$$\mathcal{Y} \ni (H_1 \rightarrow \dots \rightarrow H_n \rightarrow H_1, \rho) \longmapsto (H_1, \rho) \in \mathfrak{X}$$

Il y a de plus un isomorphisme

$$\mathcal{Y} \simeq \mathrm{Spf}(\check{\mathcal{O}}[[y_1, \dots, y_n]]/(y_1 \dots y_n - \pi))$$

où si $(H_1 \rightarrow \dots \rightarrow H_n \rightarrow H_1, \rho)$ est l'objet universel sur \mathcal{Y} il y a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Lie} H_1 & \xrightarrow{\mathrm{Lie} \varphi_1} & \dots & \longrightarrow & \mathrm{Lie} H_i & \xrightarrow{\mathrm{Lie} \varphi_i} & \mathrm{Lie} H_{i+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathrm{Lie} H_n \xrightarrow{\mathrm{Lie} \varphi_n} \mathrm{Lie} H_1 \\ \uparrow \simeq & & & & \uparrow \simeq & & \uparrow \simeq \\ \mathcal{O}_{\mathcal{Y}} & \xrightarrow{\times y_1} & \dots & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathcal{Y}} & \xrightarrow{\times y_i} & \mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \xrightarrow{\times y_n} \mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \end{array}$$

Cela découle de la théorie de la déformation de Grothendieck-Messing.

Définition 8.1. — Posons $\Delta = S(\mathcal{Y}^{an})$ le squelette de la fibre générique \mathcal{Y}^{an} égal à

$$\Delta = \{(v_1, \dots, v_n) \in]0, 1[^n \mid \sum_{i=1}^n v_i = 1\}$$

Il y a une rétraction

$$\begin{aligned} r : |\mathcal{Y}^{an}| &\twoheadrightarrow \Delta \\ (y_1, \dots, y_n) &\mapsto (v(y_1), \dots, v(y_n)) \end{aligned}$$

qui est \mathcal{O}_D^\times -invariante, c'est à dire ne dépend que de la chaîne d'isogénies $H_1 \rightarrow \dots \rightarrow H_n \rightarrow H_1$ et pas de la déformation ρ .

Comme au début de la section 6 l'isomorphisme entre les deux tours devrait induire un diagramme

$$\begin{array}{ccc} |\mathcal{Y}^{an}| & \longrightarrow & I \backslash |\Omega| \\ \downarrow & & \downarrow \\ S(\mathcal{Y}^{an}) & \xrightarrow{?} & I \backslash S(\Omega) \end{array}$$

où $I \backslash S(\Omega)$ s'identifie à $|\mathcal{A}|$ et donc un morphisme

$$\Delta \dashrightarrow |\mathcal{A}|$$

8.1. Action du groupe de Weyl affine sur Δ . — Soit $W_{\text{aff}} = \mathbb{Z}^n / \mathbb{Z} \rtimes \mathfrak{S}_n$ où $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}^n$ est le plongement diagonal.

De la même façon que l'on a défini des sections des correspondances de Hecke au niveau de l'espace *Newt* on peut définir de telles sections sur Δ .

Proposition 8.2. — Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Soit K algébriquement clos,

$$H_1 \xrightarrow{\varphi_1} \dots \longrightarrow H_n \xrightarrow{\varphi_n} H_1, \quad \varphi_n \circ \dots \circ \varphi_1 = \pi$$

une chaîne d'isogénies sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_K)$ et $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{O}_K$ tels que $\prod_i y_i = \pi$ un uplet associé. Soit (e_1, \dots, e_n) une base de $T_p(H_1)$ telle que

- $\exists \tau \in \mathfrak{S}_n$ $(e_{\tau(1)}, \dots, e_{\tau(n)})$ soit une base adaptée de $T_p(H_1)$
- la filtration de $H_1[\pi](\mathcal{O}_K)$

$$(< \pi^{-1} \bar{e}_1, \dots, \pi^{-1} \bar{e}_i, \bar{e}_{i+1}, \dots, \bar{e}_n >)_{1 \leq i \leq n}$$

soit égale à la filtration

$$\ker \varphi_1 \subset \ker(\varphi_2 \circ \varphi_1) \subset \dots \subset \ker(\varphi_{n-1} \circ \dots \circ \varphi_1) \subset H_1[\pi](\mathcal{O}_K)$$

Soit C l'adhérence schématique du sous-groupe fini

$$< \pi^{-a_1} \bar{e}_{\sigma(1)}, \dots, \pi^{-a_n} \bar{e}_{\sigma(n)} > \subset T_p(H) \otimes F / \mathcal{O}_F$$

Soit $H'_1 = H_1 / C$, $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ la base de $T_p(H'_1)$ image de $(\pi^{-a_1} e_{\sigma(1)}, \dots, \pi^{-a_n} e_{\sigma(n)})$ via $T_p(H_1) \hookrightarrow T_p(H'_1)$. Soit la chaîne d'isogénies

$$H'_1 \xrightarrow{\varphi'_1} \dots \longrightarrow H'_n \xrightarrow{\varphi'_n} H'_1$$

telle que $\forall i$ $\ker(\varphi'_i \circ \dots \circ \varphi'_1)$ soit l'adhérence schématique du groupe

$$< \pi^{-1} \bar{\epsilon}_1, \dots, \pi^{-1} \bar{\epsilon}_i, \bar{\epsilon}_{i+1}, \dots, \bar{\epsilon}_n > \subset T_p(H'_1) \otimes F / \mathcal{O}_F$$

Soient $y'_1, \dots, y'_n \in \mathcal{O}_K$, $\prod_i y'_i = \pi$, des nombres associés à $H'_1 \rightarrow \dots \rightarrow H'_n \rightarrow H'_1$.

Alors, $(v(y'_1), \dots, v(y'_n)) \in \Delta$ ne dépend que de $(a_1, \dots, a_n) \rtimes \sigma \in W_{\text{aff}}$ et de $(v(y_1), \dots, v(y_n)) \in \Delta$. Cela définit une action de W_{aff} sur Δ . L'opérateur associé à $(a_1, \dots, a_n) \rtimes \sigma$ est noté

$$(\pi^{-a_1}, \dots, \pi^{-a_n}) \rtimes \sigma$$

8.2. L'application $\Delta \longrightarrow \text{Newt}$. —

Définition 8.3. — Soit $\lambda \in]0, \frac{1}{q-1}[$. On note $\eta_\lambda : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ la fonction continue linéaire par morceaux définie par

$$\eta_\lambda(x) = \begin{cases} qx & \text{si } x \in [0, \lambda] \\ (x - \lambda) + q\lambda & \text{si } x \in [\lambda, +\infty[\end{cases}$$

Lemme 8.4. — Pour $(v_1, \dots, v_n) \in \Delta$ soit

$$\eta(v_1, \dots, v_n) = \eta_{\frac{v_1}{q-1}} \circ \dots \circ \eta_{\frac{v_n}{q-1}} : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$$

Soit

$$\mathcal{P}(v_1, \dots, v_n) = (\eta(v_1, \dots, v_n))^*_{|[1, q^n]}$$

où on pose $f^*(x) = \sup\{-xt + f(t) \mid t \in [0, +\infty[\}$. Alors $\mathcal{P}(v_1, \dots, v_n) \in \text{Newt}$ et cela définit une application

$$\mathcal{P} : \Delta \longrightarrow \text{Newt}$$

Lemme 8.5. — Soit $H_1 \xrightarrow{\varphi_1} \dots \longrightarrow H_n \xrightarrow{\varphi_n} H_1$ une chaîne d'isogénies sur \mathcal{O}_K et $(v_1, \dots, v_n) \in \Delta$ le uplet associé. Alors $\mathcal{P}(v_1, \dots, v_n)$ est le polygone de Newton de H_1 .

Corollaire 8.6. — Pour tous $(a_1, \dots, a_n) \rtimes \sigma \in W_{\text{aff}}$ et $\underline{v} \in \Delta \exists \tau \in \mathfrak{S}_n$

$$\mathcal{P}((\pi^{-a_1}, \dots, \pi^{-a_n}) \rtimes \sigma, \underline{v}) = (\pi^{-a_{\tau(1)}}, \dots, \pi^{-a_{\tau(n)}}). \mathcal{P}(\underline{v})$$

8.3. Quartiers. —

Définition 8.7. — On note

$$Q(\Delta) = \{(v_1, \dots, v_n) \in \Delta \mid v_1 \geq \frac{v_2}{q} \geq \dots \geq \frac{v_i}{q^i} \geq \dots \geq \frac{v_n}{q^n}\}$$

Proposition 8.8. — L'application $\mathcal{P}|_{Q(\Delta)}$ induit une bijection entre $Q(\Delta)$ et Newt . À $(v_1, \dots, v_n) \in Q(\Delta)$ elle associe le polygone de pentes $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ où $\forall i \lambda_i = \frac{v_i}{q^i - q^{i-1}}$.

Soit $H_1 \xrightarrow{\varphi_1} \dots \longrightarrow H_n \xrightarrow{\varphi_n} H_1$ une chaîne d'isogénies sur \mathcal{O}_K . Le point associé dans Δ est dans $Q(\Delta)$ ssi la filtration

$$(0) \subsetneq \ker \varphi_1 \subsetneq \dots \subsetneq \ker(\varphi_n \circ \dots \circ \varphi_1) = H[\pi]$$

raffine la filtration de ramification inférieure (donnée par la valuation des points de π -torsion) sur $H[\pi]$.

Rappelons qu'étant donnés deux drapeaux complets sur un \mathbb{F}_q -espace vectoriel de dimension n on peut définir leur invariant dans \mathfrak{S}_n mesurant la position relative des sous-groupes de Borel du groupe linéaire associé.

Proposition 8.9. — On a la décomposition

$$\Delta = \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma.Q(\Delta)$$

Une chaîne d'isogénies $H_1 \xrightarrow{\varphi_1} \dots \longrightarrow H_n \xrightarrow{\varphi_n} H_1$ sur \mathcal{O}_K donne lieu à un élément de $\sigma.Q(\Delta)$ ssi l'invariant des drapeaux

$$\ker \varphi_1 \subset \ker(\varphi_2 \circ \varphi_1) \subset \dots \subset \ker(\varphi_{n-1} \circ \dots \circ \varphi_1) \subset H_1[\pi](\mathcal{O}_K)$$

et un drapeau complet raffinant la filtration de ramification sur $H_1[\pi]$ est σ . L'application $\mathcal{P}|_{\sigma.Q(\Delta)}$ est l'isomorphisme composé

$$\sigma.Q(\Delta) \xrightarrow{\sigma^{-1}} Q(\Delta) \xrightarrow{\mathcal{P}} \text{Newt}$$

Les applications $\forall \tau \in \mathfrak{S}_n \tau : \sigma.Q(\Delta) \xrightarrow{\sim} \tau\sigma.Q(\Delta)$ sont affines.

Remarque 8.10. — Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ l'application affine $\sigma : Q(\Delta) \xrightarrow{\sim} \sigma.Q(\Delta)$ est donnée par les formules suivantes. Soit $(v_1, \dots, v_n) \in Q(\Delta)$ et $\sigma.(v_1, \dots, v_n) = (v'_1, \dots, v'_n)$. Alors

$$v'_1 = \frac{v_{\sigma(1)}}{q^{\sigma(1)-1}}$$

et $\forall i > 1$ si $\tau_1 \in \mathfrak{S}_i$, $\tau_2 \in \mathfrak{S}_{i+1}$ sont tels que

$$\begin{aligned} \sigma\tau_1(1) &< \dots < \sigma\tau_1(i-1) \\ \sigma\tau_2(1) &< \dots < \sigma\tau_2(i) \end{aligned}$$

alors

$$v'_i = \sum_{k=1}^i \frac{v_{\sigma\tau_2(k)}}{q^{\sigma\tau_2(k)-1}} - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{v_{\sigma\tau_1(k)}}{q^{\sigma\tau_1(k)-1}}$$

8.4. La structure simpliciale sur Δ . —

Définition 8.11. — On munit Δ de l'unique structure simpliciale W_{aff} -invariante pour laquelle l'application $\mathcal{P}_{|Q(\Delta)} : Q(\Delta) \xrightarrow{\sim} \text{Newt}$ soit un isomorphisme simplicial.

Proposition 8.12. — Les simplexes de la structure simpliciale précédente sont des simplexes standards pour la structure affine naturelle de Δ . L'action de W_{aff} est affine sur chaque simplexe.

8.5. Énoncé du théorème principal. —

Théorème 8.13. — L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld induit un isomorphisme simpliciale W_{aff} -équivariant

$$\Delta \xrightarrow{\sim} |\mathcal{A}|$$

affine sur chaque simplexe tel que l'application d'oubli du niveau $\mathcal{Y}^{an} \rightarrow \mathfrak{X}^{an}$ s'identifie au quotient par \mathfrak{S}_n

$$\begin{array}{ccccc} |\mathcal{Y}^{an}| & \longrightarrow & \Delta & \xrightarrow{\sim} & |\mathcal{A}| \\ \downarrow & & \downarrow \mathcal{P} & & \downarrow pr_Q \\ |\mathfrak{X}^{an}| & \longrightarrow & \text{Newt} & \xrightarrow{\sim} & Q \end{array}$$

Dans cette bijection $Q(\Delta)$ correspond au quartier $Q \subset |\mathcal{A}|$ et le simplexe fondamental dans Q correspond à

$$\{(v_1, \dots, v_n) \in \Delta \mid v_1 \geq \frac{v_2}{q} \geq \dots \geq \frac{v_n}{q^{n-1}} \geq \frac{v_1}{q^n}\}$$

Soit G le barycentre du simplexe fondamental dans $|\mathcal{A}|$. Pour $1 \leq i \leq n$ la correspondance de Hecke $(H_1 \rightarrow \dots \rightarrow H_n \rightarrow H_1) \mapsto H_i$ est donnée par une rotation autour de G dans l'appartement \mathcal{A} composée avec l'application quotient $|\mathcal{A}| \twoheadrightarrow Q$.

Soit $Q' \subset Q$ le quartier privé des murs $\alpha_{i,i+1} = 0$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Sur l'image réciproque de Q' dans l'espace de Lubin-Tate sans niveau le groupe p -divisible universel possède un drapeau complet de sous-groupes canoniques. Cela fournit une section sur cet ouvert admissible du revêtement en niveau Iwahori. Cette section est donnée par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & |\mathcal{A}| \\ & \nearrow & \downarrow pr_Q \\ & & Q \\ & \longleftarrow & Q' \end{array}$$

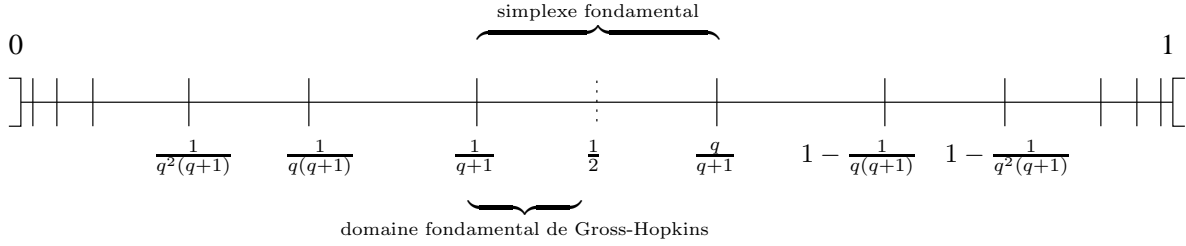
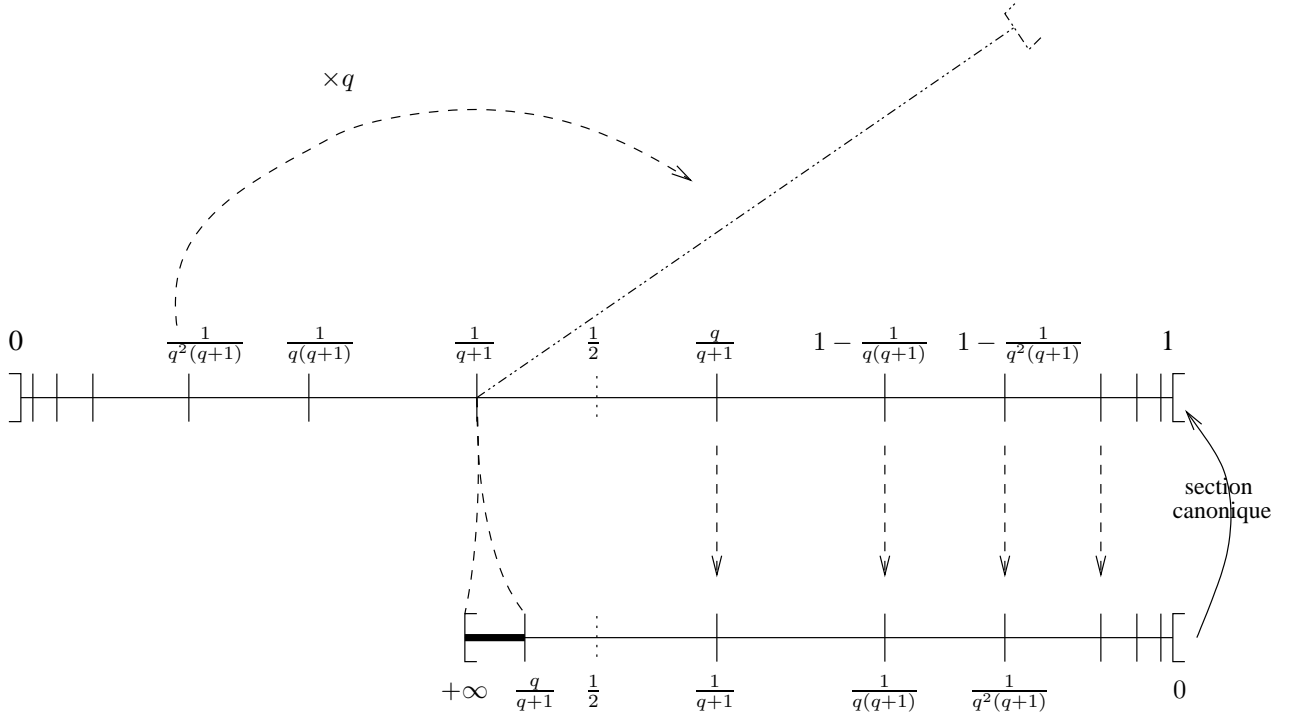
FIGURE 8. La structure simpliciale de $\Delta =]0, 1[$ dans le cas de GL_2 

FIGURE 9. L'application entre les squelettes de l'espace de Lubin-Tate en niveau Iwahori et celui sans niveau pour GL_2 (cette application est "multivaluée" en $\frac{1}{q+1}$). La section canonique est définie sur le segment $]0, \frac{q}{q+1}[$ d'image $]\frac{1}{q+1}, 1[$. L'opérateur de Hecke donné par l'élément non-trivial dans le normalisateur de l'Iwahori modulo l'Iwahori qui agit comme automorphisme de l'espace en niveau Iwahori correspond à la symétrie de centre $\frac{1}{2}$, $x \mapsto 1 - x$.

Appendice A

L'immeuble de PGL_n

A.1. Définitions. — On fixe V un F -espace vectoriel de dimension finie. On note $G = \mathrm{PGL}(V)$ le groupe algébrique sur F associé.

Définition A.1. — L'immeuble de G est le complexe simplicial $G(F)$ -équivariant dont les sommets sont les classes d'homothéties de réseaux dans V et dont les simplexes sont les ensembles finis (a_1, \dots, a_d) de sommets tels que les $(a_i)_{1 \leq i \leq d}$ possèdent des représentants $(\Lambda_i)_{1 \leq i \leq d}$ tels que

$$\pi \Lambda_1 \subsetneq \Lambda_d \subsetneq \dots \subsetneq \Lambda_2 \subsetneq \Lambda_1$$

On note \mathcal{I} cet ensemble simplicial. Pour un réseau Λ on notera $[\Lambda] \in \mathcal{I}$ sa classe d'homothétie.

Nous commettrons parfois l'abus de notation qui consiste à noter \mathcal{I} l'ensemble des sommets du complexe simplicial \mathcal{I} et écrirons ainsi $x \in \mathcal{I}$ pour x un sommet de \mathcal{I} .

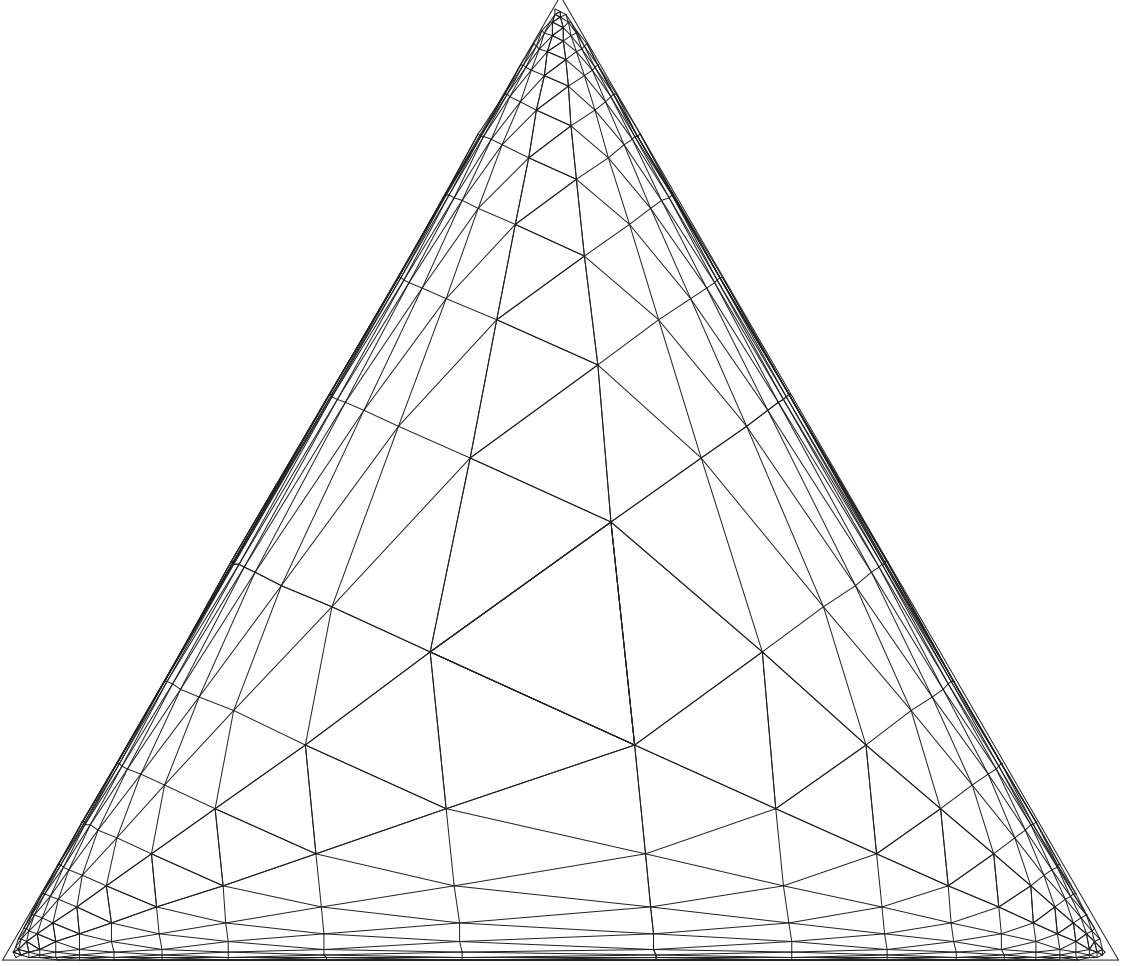


FIGURE 10.

FIGURE 11. L'appartenance de PGL_3 dans le squelette de l'espace de Lubin-Tate en niveau Iwahori !

Rappelons que le choix d'un sommet $[\Lambda_0] \in \mathcal{I}$ définit un étiquetage des sommets de \mathcal{I} par des éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &\longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ [\Lambda] &\longmapsto [\Lambda_0 : \Lambda] \end{aligned}$$

Le choix d'un autre sommet translate cet étiquetage par une constante dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Si $g \in G(F)$ alors l'action de g translate l'étiquetage par une constante égale à $v(\det(g)) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Définition A.2. — Une norme sur V est une application $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ vérifiant

- $\forall x \in E \quad \|x\| = +\infty \Leftrightarrow x = 0$
- $\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x + y\| \geq \inf\{\|x\|, \|y\|\}$
- $\forall a \in F \quad \forall x \in E \quad \|ax\| = v(a) + \|x\|$

La définition d'une norme que nous prenons n'est pas la définition usuelle (celle donnée page 58 de [3]). Nous prenons la version "additive" de la définition usuelle (si $\|\cdot\|$ est une norme en notre sens alors la norme usuelle associée est $q^{-\|\cdot\|}$).

Définition A.3. — Deux normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ sont équivalentes si il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2 + A$. On notera $[[\cdot]]$ la classe d'équivalence de $\|\cdot\|$. On définit une action de $G(F)$ sur les normes et leurs classes d'équivalence en posant $g.\|\cdot\| = \|g^{-1}.\cdot\|$.

Rappelons également la proposition suivante.

Proposition A.4. — *La réalisation géométrique $|\mathcal{I}|$ de l'immeuble de G s'identifie comme ensemble $G(F)$ -équivariant à l'ensemble des classes d'équivalence de normes sur V . Si $[\Lambda]$ est une classe d'homothétie de réseaux dans V le sommet associé dans la réalisation géométrique de l'immeuble est la classe de la norme*

$$\|x\|_\Lambda = -\inf\{k \in \mathbb{Z} \mid \pi^k x \in \Lambda\}$$

Rappelons également que si $\|\cdot\|$ est une norme alors l'ensemble

$$\{[\{x \in V \mid \|x\| \geq a\}] \mid a \in \mathbb{R}\}$$

forme un simplexe dans l'immeuble et que dans la réalisation géométrique le point $[[\cdot]]$ est dans la réalisation géométrique de ce simplexe.

Réciproquement, si $\pi\Lambda_1 \subsetneq \Lambda_d \subsetneq \cdots \subsetneq \Lambda_1$ définit un simplexe σ , si

$$\Delta^d = \{(t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}_+^d \mid \sum_{i=1}^d t_i = 1\}$$

est le simplexe usuel il y a alors un homéomorphisme

$$\Delta^d \xrightarrow{\sim} |\sigma|$$

qui à (t_1, \dots, t_d) associe la norme

$$\|\cdot\| = \inf\{\|\cdot\|_{\Lambda_i} + t_1 + \cdots + t_{i-1} \mid 1 \leq i \leq d\}$$

(où l'on a posé $t_1 + \cdots + t_{i-1} = 0$ si $i = 1$). Cet homéomorphisme est une isométrie si l'immeuble est muni de sa métrique définie à partir de celle sur ses appartements et Δ^d de la métrique $\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sum_i t_i^2}$.

A.2. Appartements. —

A.2.1. Définition. —

Définition A.5. — Soit T un tore maximal déployé dans G . L'appartement associé à T est le sous-complexe simplicial dont les sommets sont les points fixes de $T(F)^1 = \bigcap_{\chi \in X^*(T)} \ker |\chi|$. On le note $\mathcal{A}(T)$.

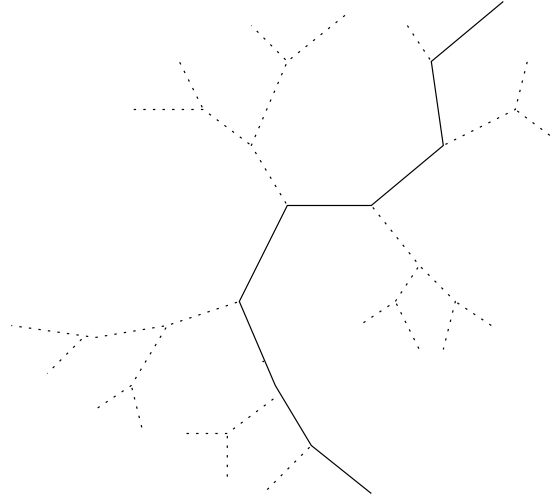
La réalisation géométrique $|\mathcal{A}(T)|$ de $\mathcal{A}(T)$ est le sous-espace fermé de $|\mathcal{I}|$ formé des points fixes de $T(F)^1$.

L'ensemble des tores maximaux déployés dans G est en bijection avec l'ensemble des n -uplets de droites (D_1, \dots, D_n) dans V tels que $V = D_1 \oplus \cdots \oplus D_n$. A (D_1, \dots, D_n) est associé le tore $T = \mathbb{G}_m^n / \mathbb{G}_m \hookrightarrow G$ agissant diagonalement relativement à la décomposition en sommes de droites de V . L'ensemble des appartements est donc en bijection avec l'ensemble des classes d'équivalences de bases (e_1, \dots, e_n) de V où $\forall (x_i)_i \in (F^\times)^n$ $(e_1, \dots, e_n) \sim (x_1 e_1, \dots, x_n e_n)$. A la base (e_1, \dots, e_n) est associé le complexe simplicial dont les sommets sont

$$\{[\langle \pi^{a_1} e_1, \dots, \pi^{a_n} e_n \rangle] \mid (a_i)_i \in \mathbb{Z}^n\}$$

qui est l'appartement associé.

Exemple A.6. — Pour PGL_2 les appartements sont les droites simpliciales infinies à droite et à gauche dans l'arbre.

FIGURE 12. Un appartement dans l'immeuble de PGL_2 sur \mathbb{Q}_2 .

A.2.2. Structure affine. — Le groupe $T(F)$ stabilise l'appartement $\mathcal{A}(T)$ et fait des sommets de $\mathcal{A}(T)$ un espace principal homogène sous $T(F)/T(F)^1$. Il y a un isomorphisme

$$\begin{aligned} X_*(T) &\xrightarrow{\sim} T(F)/T(F)^1 \\ \omega &\longmapsto \omega(\pi)T(F)^1 \end{aligned}$$

Si $[\Lambda] \in \mathcal{A}(T)$ alors si \underline{G} désigne le modèle entier de G associé, $\underline{G} = \mathrm{PGL}(\Lambda)$, si \underline{T} désigne l'adhérence schématique de T dans \underline{G} , \underline{T} est un sous-tore de \underline{G} . Alors, $T(F)^1 = \underline{T}(\mathcal{O}_F)$ et le choix de $[\Lambda]$ induit au niveau des sommets le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} T(F)/\underline{T}(\mathcal{O}_F) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{A}(T) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G(F)/\underline{G}(\mathcal{O}_F) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{I} \end{array}$$

qui identifie les sommets de $\mathcal{A}(T)$ avec l'immeuble de T .

L'action de $X_*(T)$ sur les sommets de $\mathcal{A}(T)$ s'étend en une structure d'espace affine sur $|\mathcal{A}(T)|$ d'espace vectoriel sous-jacent $X_*(T) \otimes \mathbb{R}$. Si T est associé à la base (e_1, \dots, e_n) de V , $X_*(T) \simeq \mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}$, \mathbb{Z} agissant diagonalement sur \mathbb{Z}^n et où si $(\epsilon_i)_i$ est la base canonique de \mathbb{Z}^n , ϵ_i correspond au co-caractère $t \mapsto [e_j \mapsto t^{\delta_{ij}} e_j]$. En choisissant comme origine $[< e_1, \dots, e_n >]$ dans $|\mathcal{A}(T)|$,

$$|\mathcal{A}(T)| \simeq X_*(T) \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n/\mathbb{R}$$

et à $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ est associée la classe de la norme

$$\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right\| = \inf \{ v(\lambda_i) - a_i \mid 1 \leq i \leq n \}$$

Et en fait on a la réciproque suivante :

Lemme A.7. — Une classe d'équivalence de normes $[\|\cdot\|]$ est dans l'appartement associé à la base (e_1, \dots, e_n) ssi $\forall (x_1, \dots, x_n) \in F^n \quad \|\sum_{i=1}^n x_i e_i\|$ ne dépend que des $v(x_i)$ pour $1 \leq i \leq n$.

Démonstration. Soit $\|\cdot\|$ une norme comme dans l'énoncé. Il suffit de montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ $\{x \in V \mid \|x\| \geq a\}$ est un réseau de la forme $\langle \pi^{a_1} e_1, \dots, \pi^{a_n} e_n \rangle$ puisque $[\|\cdot\|]$ est dans l'enveloppe convexe de ces classes de réseaux lorsque a varie dans \mathbb{R} . Cela résulte du lemme qui suit dont la démonstration élémentaire est laissée au lecteur. \square

Lemme A.8. — Soit un sous-ensemble $\Delta \subset (\mathbb{Z} \cup \{+\infty\})^n$. L'ensemble

$$\{ (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in F^n \mid v(x_i) \in \Delta \}$$

est un réseau de F^n ssi il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ tels que $\Delta = \{ (k_1, \dots, k_n) \mid \forall i \ k_i \geq a_i \}$

A.2.3. Le système de racines affines. — On a vu qu'on peut retrouver les sommets de l'appartement associé au tore T à partir de celui-ci et mettre une structure affine dessus. En fait, à partir du système de racines associé on peut retrouver toute la structure simpliciale.

Soit $\Phi \subset X^*(T)$ le système de racines de T dans $\text{Lie } G$. On appelle racine affine l'ensemble des fonctions

$$\Phi_{\text{aff}} = \{ \alpha + k \mid \alpha \in \Phi \ k \in \mathbb{Z} \}$$

Soit $x_0 \in |\mathcal{A}(T)|$ un sommet (un point spécial dans la terminologie de Bruhat-Tits, mais pour PGL_n tous les sommets sont spéciaux). Le choix de x_0 permet d'identifier $|\mathcal{A}(T)|$ à $X_*(T) \otimes \mathbb{R}$ et fournit donc un ensemble de fonctions affines encore appelées racines affines sur $|\mathcal{A}(T)|$ et noté Φ_{aff} . On vérifie aussitôt que cet ensemble de fonctions affines ne dépend pas du choix de x_0 .

Définition A.9. — Un mur est un hyperplan de la forme $\alpha^{-1}(\{0\})$ où $\alpha \in \Phi_{\text{aff}}$. Un demi-appartement est un ensemble de la forme $\alpha^{-1}([0, +\infty[)$.

Exemple A.10. — Dans l'immeuble de PGL_2 les demi-appartements sont les demi-droites simpliciales.

La structure simpliciale se retrouve maintenant de la façon suivante.

Définition A.11. — Une facette est une classe dans $|\mathcal{A}(T)|$ pour la relation d'équivalence $x \sim y$ si x et y sont contenus dans les même demi-appartements. On met la relation d'ordre suivante sur les facettes : $F_1 < F_2$ si $F_1 \subset \overline{F_2}$.

Appelons simplexe ouvert $\{(x_i)_i \in \mathbb{R}_+^d \mid \sum_i x_i = 1 \text{ et } \forall i \ x_i \neq 0\}$. Ainsi pour un complexe simplicial \mathcal{C} , et σ un simplexe de \mathcal{C} on peut définir le simplexe ouvert associé à σ dans la réalisation géométrique $|\sigma| \subset |\mathcal{C}|$. Ces simplexes ouverts forment une partition de $|\mathcal{C}|$.

Fait 1. — Les facettes s'identifient aux simplexes ouverts dans la réalisation géométrique du complexe simplicial $\mathcal{A}(T)$. Ce complexe simplicial s'identifie au complexe simplicial associé à l'ensemble ordonné des facettes.

Soit Δ un ensemble de racines simples dans Φ associé à un ordre sur les racines et $\{\omega_1, \dots, \omega_{n-1}\}$ l'ensemble des copoids fondamentaux associé à Δ . Alors, $X_*(T) = \langle \omega_1, \dots, \omega_{n-1} \rangle$ et un simplexe maximal associé est

$$\text{Conv}(0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}) = \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} a_i \omega_i \mid a_i \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \sum_i a_i \leq 1 \right\} \subset X_*(T) \otimes \mathbb{R}$$

dont les sommets sont $(0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1})$. Les autres simplexes (les adhérences des facettes) s'en déduisent en prenant les itérés sous le groupe de Weyl affine des faces de ce simplexe.

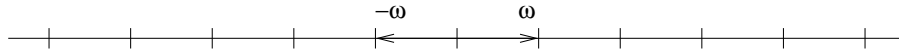
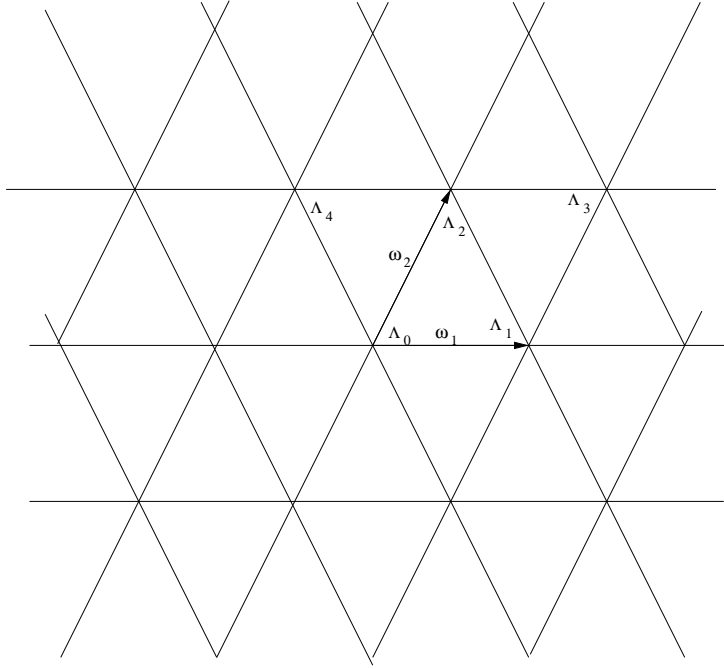


FIGURE 13. Un appartement de l'immeuble de PGL_2 . ω = copoids fondamental

Dans la figure ci-dessous $\omega_1(t) = (t, 1, 1)$ et $\omega_2(t) = (t, t, 1)$ sont les copoids fondamentaux associés au système de racines simples $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ pour le tore diagonal de PGL_3 où $\alpha_1(t_1, t_2, t_3) = t_1 t_2^{-1}$ et $\alpha_2(t_1, t_2, t_3) = t_2 t_3^{-1}$. Les réseaux indiqués sont $\Lambda_0 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, $\Lambda_1 = \langle \pi e_1, e_2, e_3 \rangle$, $\Lambda_2 = \langle \pi e_1, \pi e_2, e_3 \rangle$, $\Lambda_3 = \langle \pi^2 e_1, \pi e_2, e_3 \rangle$, $\Lambda_4 = \langle e_1, \pi e_2, e_3 \rangle$. Le choix fait de la structure euclidienne pour représenter l'appartement de PGL_3 n'est pas quelconque. On a pris, à un scalaire près, l'unique structure euclidienne invariante sous l'action du groupe de Weyl affine (cf. la section qui suit). Pour cette métrique les simplexes sont des triangles équilatéraux.

FIGURE 14. Un appartement dans l'immeuble de PGL_3

A.2.4. *Groupe de Weyl affine.* — Soit T un tore déployé maximal dans G .

Définition A.12. — On note $W_{\mathrm{aff}} = N(T)(F)/T(F)^1$.

Le groupe W_{aff} agit sur $|\mathcal{A}(T)|$ par des transformations affines. Il y a de plus une suite exacte scindable

$$1 \longrightarrow X_*(T) \longrightarrow W_{\mathrm{aff}} \longrightarrow W \longrightarrow 1$$

où $W = N(T)(F)/T(F)$ est le groupe de Weil vectoriel du système de racines Φ . L'application $W_{\mathrm{aff}} \longrightarrow W$ s'identifie à l'application qui à une application affine associe sa partie vectorielle. Le choix d'une origine $x_0 \in \mathcal{A}(T)$ induit un scindage $W_{\mathrm{aff}} \simeq X_*(T) \rtimes W$ via $W = \mathrm{Stab}_{W_{\mathrm{aff}}}(x_0)$. L'action de W_{aff} sur $|\mathcal{A}(T)|$ permet également de retrouver la structure simpliciale puisque les murs sont exactement les hyperplans fixes des symétries non-triviales dans W_{aff} . Ce complexe simplicial ne dépend que du système de Coxeter associé à Φ_{aff} .

On muni $|\mathcal{A}(T)|$ d'une métrique euclidienne invariante sous l'action du groupe de Weyl affine (une telle métrique est unique à un scalaire près). Bruhat et Tits montrent qu'une telle métrique peut s'étendre à tout l'immeuble en une métrique $G(F)$ -invariante de manière à redonner la métrique que l'on a fixée en restriction aux appartements. On renvoie à la section 3 du chapitre 3 de [3] pour une formule donnant la distance entre deux normes dans l'immeuble.

A.2.5. *Une paramétrisation des chambres dans un appartement.* — Soit $\mathcal{A}(T)$ un appartement dans \mathcal{I} . Soit $\Phi \subset X^*(T)$ l'ensemble des racines associées et Φ^+ un ensemble de racines positives associé au choix d'un sous-groupe de Borel contenant T . Nous allons donner une paramétrisation des simplexes maximaux dans $\mathcal{A}(T)$ comme intersection de demi-appartements (cf. figure 15).

Proposition A.13. — Fixons une origine dans $\mathcal{A}(T)$ et identifions donc les sommets de $\mathcal{A}(T)$ à $X_*(T)$. Soit

$$A = \{ (b_\alpha)_{\alpha \in \Phi_+} \in \mathbb{Z}^{\Phi_+} \mid \forall \alpha, \beta \in \Phi_+ \ \alpha + \beta \in \Phi_+ \Rightarrow b_{\alpha+\beta} \in \{b_\alpha + b_\beta, b_\alpha + b_\beta + 1\} \}$$

et B l'ensemble des simplexes maximaux (vus comme les collections de leurs sommets) dans $\mathcal{A}(T)$. Il y a alors une bijection entre A et B donnée par les deux applications inverses

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow B \\ (b_\alpha)_{\alpha \in \Phi_+} &\longmapsto \{x \in X_*(T) \mid \forall \alpha \in \Phi_+ \alpha(x) \in [b_\alpha, b_\alpha + 1]\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B &\longrightarrow A \\ S &\longmapsto (\inf\{\alpha(x) \mid x \in S\})_{\alpha \in \Phi_+} \end{aligned}$$

La réalisation géométrique du simplexe associé à $(b_\alpha)_\alpha$ est

$$\{x \in X_*(T) \otimes \mathbb{R} \mid \forall \alpha \in \Phi_+ \alpha(x) \in [b_\alpha, b_\alpha + 1]\}$$

Démonstration. On peut supposer que T est le tore diagonal de PGL_n

$$T = \{\mathrm{diag}(t_1, \dots, t_n) \mid t_i \in \mathbb{G}_m\}$$

et que $\Phi_+ = \{t_i t_j^{-1} \mid i < j\}$. On identifie alors $X_*(T)$ à $\mathbb{Z}^n / \mathbb{Z}$ où $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}^n$ est le plongement diagonal. Soit donc une collection d'entiers relatifs $(b_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}$ telle que

$$\forall i < j < k \quad b_{ik} \in \{b_{ij} + b_{jk}, b_{ij} + b_{jk} + 1\}$$

On veut montrer que

$$S = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n / \mathbb{Z} \mid \forall i < j \quad a_j - a_i \in [b_{ij}, b_{ij} + 1]\}$$

est un simplexe maximal et que cela en donne une paramétrisation. Le point $P = (0, b_{12}, \dots, b_{1i}, \dots, b_{1n})$ appartient à S . On vérifie facilement que quitte à translater par $-P$ et transformer les b_{ij} en $b_{ij} - b_{1j} + b_{1i}$ pour $1 < i < j \leq n$ on doit montrer que les simplexes maximaux possédant $(0, \dots, 0)$ comme sommet sont paramétrés par

$$\{(b_{ij})_{1 \leq i < j \leq n} \mid \forall i > 1 \quad b_{1i} = 0 \text{ et } \forall 1 \leq i < j < k \quad b_{ik} \in \{b_{ij} + b_{jk}, b_{ij} + b_{jk} + 1\}\}$$

Cet ensemble s'identifie à

$$X = \{(b_{ij})_{1 < i < j \leq n} \mid \forall i < j \quad b_{ij} \in [-1, 0] \text{ et } \forall i < j < k \quad b_{ik} \in \{b_{ij} + b_{jk}, b_{ij} + b_{jk} + 1\}\}$$

Soit le simplexe maximal

$$\begin{aligned} S_0 &= \{(0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_i) \mid 0 \leq i < n\} \\ &= \{(a_1, \dots, a_n) \mid \forall i < j \quad a_j - a_i \in [0, 1]\} \end{aligned}$$

qui est associé à la donnée $\forall i < j \quad b_{ij} = 0$. Les autres simplexes maximaux possédant $(0, \dots, 0)$ comme sommet sont les orbites sous le groupe de Weyl \mathfrak{S}_n de S_0 . De plus

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n \quad \sigma.S_0 &= \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n / \mathbb{Z} \mid \forall i < j \quad a_{\sigma^{-1}(j)} - a_{\sigma^{-1}(i)} \in [0, 1]\} \\ &= \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n / \mathbb{Z} \mid \forall i < j \quad a_j - a_i \in [0, 1] \text{ si } \sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j) \\ &\quad \text{et } a_j - a_i \in [-1, 0] \text{ si } \sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(j)\} \end{aligned}$$

Soit donc l'application qui à $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ associe $(b_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}$ où

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j) \\ -1 & \text{si } \sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(j) \end{cases}$$

Il est aisé de vérifier que cela définit une application $\mathfrak{S}_n \longrightarrow X$ qui d'après le lemme qui suit est une bijection. \square

Lemme A.14. — Soit l'application de \mathfrak{S}_n dans l'ensemble des parties de $\{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ qui à σ associe $\{i < j \mid \sigma(i) < \sigma(j)\}$. Elle induit une bijection entre \mathfrak{S}_n et

$$\left\{ B \mid \begin{array}{l} (i, j) \in B \text{ et } (j, k) \in B \Rightarrow (i, k) \in B \\ (i, j) \notin B \text{ et } (j, k) \notin B \Rightarrow (i, k) \notin B \end{array} \right\}$$

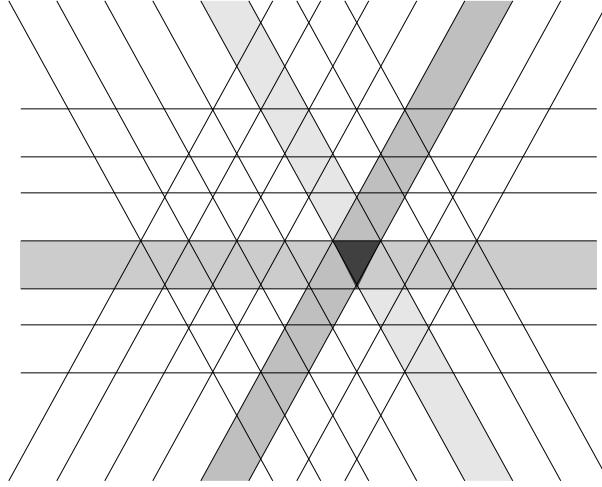


FIGURE 15. Un simplexe paramétré par une intersection de demi-appartements

A.3. Immeuble dual. — Notons $\mathcal{I}(V)$ l'immeuble de $\mathrm{PGL}(V)$ et $\mathcal{I}(V^*)$ celui de $\mathrm{PGL}(V^*)$.

Définition A.15. — Pour Λ un réseau dans V notons $\Lambda^\vee = \{\varphi \in V^* \mid \varphi(\Lambda) \subset \mathcal{O}_F\}$ le réseaux dual.

L'isomorphisme de complexes simpliciaux

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(V) &\longrightarrow \mathcal{I}(V^*) \\ [\Lambda] &\longmapsto [\Lambda^\vee] \end{aligned}$$

s'étend en une isométrie $|\mathcal{I}(V)| \xrightarrow{\sim} |\mathcal{I}(V^*)|$ en posant pour toute norme $\|\cdot\|$ sur V

$$\forall \varphi \in V^* \quad \|\varphi\|^\vee = \inf\{v(\varphi(x)) + \|x\| \mid \|x\| \geq 0\}$$

qui définit une norme $\|\cdot\|^\vee$ sur V^* , et définit l'isométrie $[\|\cdot\|] \longmapsto [\|\cdot\|^\vee]$. Cette isométrie transforme l'action de $g \in \mathrm{PGL}(V)$ en celle de $({}^t g)^{-1}$ et envoie les appartements sur des appartements via des isométries affines.

A.4. Quartiers. —

Définition A.16. — Un quartier dans l'appartement $|\mathcal{A}(T)|$ de $|\mathcal{I}|$ est un sous-ensemble fermé dans $|\mathcal{A}(T)|$ de la forme $x + C$ où C est une chambre vectorielle dans $X_*(T) \otimes \mathbb{R}$, l'espace vectoriel directeur de l'espace affine $|\mathcal{A}(T)|$. L'élément x est appelé le sommet du quartier $x + C$.

On renvoie à la figure 16.

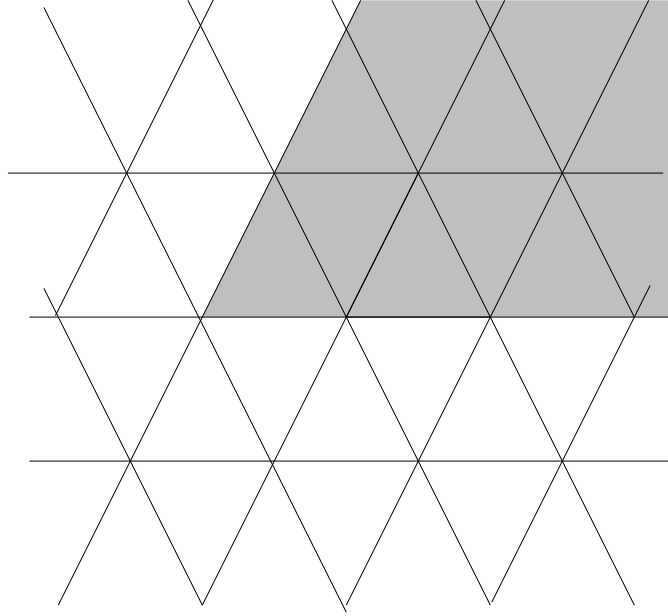
Soit $[\Lambda_0] \in \mathcal{I}$. Soit Q un quartier de sommet $[\Lambda_0]$ dans $|\mathcal{I}|$. Il existe alors une base (e_1, \dots, e_n) de Λ_0 telle que les sommets de \mathcal{I} dans Q soient

$$\{ [\langle \pi^{a_1} e_1, \dots, \pi^{a_n} e_n \rangle] \mid a_1 \geq \dots \geq a_n \}$$

Si Q est un quartier de sommet x dans l'appartement $|\mathcal{A}(T)|$ il existe alors un ensemble de co-poids fondamentaux $(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$ dans $X_*(T)$ tel que

$$Q = x + \mathbb{R}_+ \omega_1 + \dots + \mathbb{R}_+ \omega_{n-1}$$

Les quartiers de sommet x dans l'appartement $\mathcal{A}(T)$ sont en bijection avec les sous-groupes de Borel de G contenant T . A un sous-groupe de Borel est associé un ensemble de racines positives, donc de racines simples et de co-poids fondamentaux.

FIGURE 16. Un quartier dans l'immeuble de PGL_3

A.5. Enclos. —

Définition A.17 ([2]). — Soit M un sous-ensemble fini de sommets contenu dans un appartement $\mathcal{A}(T)$. On appelle enclos de M l'intersection des demi-appartements dans $|\mathcal{A}(T)|$ contenant M .

A priori cette définition est ambiguë puisque l'enclos de M semble dépendre du choix d'un appartement dans lesquels M est contenu. Cependant ce n'est pas le cas grâce à la proposition suivante.

Proposition A.18. — Soit M comme dans la définition précédente. Alors l'enclos de M est égal à l'intersection des appartements dans lesquels M est contenu. Il est aussi égal à la réalisation géométrique de l'enveloppe convexe simpliciale de M .

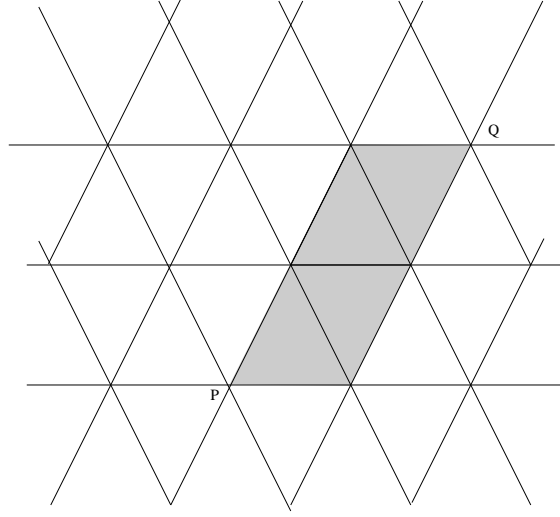
Démonstration. Soient C_1 l'enclos de M , C_2 l'intersection des appartements contenant M et C_3 la réalisation géométrique de l'enveloppe convexe simpliciale. Il est facile de vérifier “à la main” que les demi-appartements sont des intersections de deux appartements. De plus l'intersection de deux appartements ainsi que les demi-appartements sont simplicialement convexes. On en déduit les inclusions

$$C_3 \subset C_2 \subset C_1$$

Il suffit donc de montrer que si C est la réalisation géométrique d'un sous-complexe simplicial convexe fini d'un appartement et $x \notin C$ un sommet dans cet appartement il existe alors $\alpha \in \Phi_{\mathrm{aff}}$ telle que $\alpha(x) \leq 0$ et $\forall y \in C \alpha(y) \geq 0$. Bien que pénible à vérifier cela ne pose pas de problèmes. \square

Remarque A.19. — Pour l'immeuble de PGL_2 l'enclos coïncide avec l'enveloppe convexe pour la structure affine de l'appartement, mais en général cette enveloppe convexe affine est contenue strictement dans l'enveloppe convexe simpliciale.

Proposition A.20. — 4.4 Soit S un ensemble fini de sommets contenus dans un même appartement. Une classe de normes $[\|\cdot\|] \in |\mathcal{I}|$ est dans l'enclos délimité par les éléments de S ssi pour un ensemble de représentants \tilde{S} des classes d'homothéties des réseaux dans S la fonction $x \mapsto \|x\|$ ne dépende que des $\|x\|_\Lambda$, $\Lambda \in \tilde{S}$.

FIGURE 17. L'enclos délimité par les points P et Q dans l'immeuble de PGL_3

Démonstration. Si les éléments de S sont contenus dans l'appartement associé à la base (e_1, \dots, e_n) de V alors les $\|\cdot\|_\Lambda$ ne dépendent que des valuations des coordonnées dans une telle base. La proposition résulte donc du lemme A.7 couplé à la proposition précédente. \square

Définition A.21. — Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur V . Posons

$$\|\cdot\|_1 \wedge \|\cdot\|_2 = \inf\{\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2\}$$

et

$$\|\cdot\|_1 \vee \|\cdot\|_2 = (\|\cdot\|_1^\vee \wedge \|\cdot\|_2^\vee)^\vee$$

qui définit deux opérations binaires sur les normes sur V .

Ces deux opérations étendent les opérations d'intersection et de sommes de deux réseaux :

$$\|\cdot\|_{\Lambda_1} \wedge \|\cdot\|_{\Lambda_2} = \|\cdot\|_{\Lambda_1 \cap \Lambda_2}, \quad \|\cdot\|_{\Lambda_1} \vee \|\cdot\|_{\Lambda_2} = \|\cdot\|_{\Lambda_1 + \Lambda_2}$$

On peut alors montrer la proposition suivante :

Proposition A.22. — *L'enclos d'un ensemble fini de sommets est l'ensemble des classes de normes $[\|\cdot\|]$ telle que $\|\cdot\|$ puisse s'obtenir à partir des $\|\cdot\|_\Lambda$, $[\Lambda] \in S$ et l'itération d'un nombre fini d'opérations qui sont*

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \|\cdot\| \mapsto \|\cdot\| + A, \quad \vee \quad \text{et} \quad \wedge$$

A.6. Quotients de l'immeuble. —

A.6.1. Quotient par un sous-groupe compact maximal de GL_n . — Soit $[\Lambda_0] \in \mathcal{I}$ et $\mathrm{GL}(\Lambda_0)$ le sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(V)$ associé. Soit Q un quartier de sommet $[\Lambda_0]$ dans un appartement contenant $[\Lambda_0]$. Alors,

$$Q \hookrightarrow |\mathcal{I}| \twoheadrightarrow \mathrm{GL}(\Lambda_0) \backslash |\mathcal{I}|$$

induit un isomorphisme

$$Q \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}(\Lambda_0) \backslash |\mathcal{I}|$$

qui au niveau des sommets n'est rien d'autre que la décomposition de Cartan de GL_n

$$\mathrm{GL}_n(F) = \coprod_{a_1 \geq \dots \geq a_n} \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) \mathrm{diag}(\pi^{a_1}, \dots, \pi^{a_n}) \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$$

Cela définit une projection

$$\mathrm{pr}_Q : |\mathcal{I}| \longrightarrow Q$$

Si Q' est un autre quartier de sommet $[\Lambda_0]$ (pas forcément dans le même appartement) alors la restriction de pr_Q à Q' induit une isométrie affine (au sens où elle conserve les barycentres) entre Q' et Q . De plus, si on fixe un étiquetage des sommets $\epsilon : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ alors la projection pr_Q conserve cet étiquetage. Ainsi si Q , resp. Q' , est contenu dans l'appartement $|\mathcal{A}(T)|$, resp. $|\mathcal{A}(T')|$, si

$$Q = [\Lambda_0] + \mathbb{R}_+\omega_1 + \cdots + \mathbb{R}_+\omega_{n-1}, \text{ resp. } Q' = [\Lambda_0] + \mathbb{R}_+\omega'_1 + \cdots + \mathbb{R}_+\omega'_{n-1}$$

pour des co-poids fondamentaux $(\omega_i)_i$ dans $X_*(T)$, resp. $(\omega'_i)_i$ dans $X_*(T')$, il existe alors une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}$ telle que

$$\forall i \quad \epsilon([\Lambda_0] + \omega'_i) = \epsilon([\Lambda_0] + \omega_{\sigma(i)})$$

Cette permutation se calcule en utilisant le fait que pr_Q conserve un étiquetage des sommets. Alors, via les identifications précédentes

$$\begin{aligned} \text{pr}_{Q|Q'} : Q' &\longrightarrow Q \\ \sum_{i=1}^{n-1} x_i \omega'_i &\longmapsto \sum_{i=1}^{n-1} x_i \omega_{\sigma(i)} \end{aligned}$$

Parmi les autres propriétés de cette projection on vérifie que si S est un ensemble de sommets contenus dans un même quartier d'un appartement de \mathcal{I} alors l'image par pr_Q de l'enclos de S est l'enclos de $\text{pr}_Q(S)$.

A.7. Quotient par un sous-groupe d'Iwahori. — Soit S un simplexe maximal dans \mathcal{I} et

$$I = \{g \in G(F) \mid \forall x \in S \ g.x = x\}$$

le sous-groupe d'Iwahori associé.

Soit \mathcal{A} un appartement contenant S . L'application composée

$$|\mathcal{A}| \hookrightarrow |\mathcal{I}| \twoheadrightarrow I \backslash |\mathcal{I}|$$

induit un isomorphisme

$$|\mathcal{A}| \xrightarrow{\sim} I \backslash |\mathcal{I}|$$

Appendice B

Ramification supérieure/inférieure dans le cas monogène

Dans cet appendice nous explicitions les définitions d'Abbes et Saito dans le cas des algèbres localement intersection complète monogènes, ce qui est le cas des sous-schémas en groupes finis localement libres des groupes formels de dimension 1.

Notons f un polynôme unitaire séparable à coefficients dans un corps valué complet non-archimédien K de valuation $v : K \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On supposera de plus que $f \in \mathcal{O}_K[T]$. Soit \overline{K} une clôture algébrique de K . On note

$$f(T) = \prod_{i \in I} (T - \alpha_i)$$

où $\forall i \ \alpha_i \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$.

La fonction f définit un morphisme étale fini d'espaces rigides

$$f : \mathbb{B}^1 \xrightarrow{\text{étale fini}} \mathbb{B}^1$$

Lorsque $f(0) = 0$ on va s'intéresser à la façon dont varient les composantes connexes géométriques des images réciproques des boules de rayon ϵ lorsque ϵ varie dans [01]

$$f^{-1}(\mathbb{B}(0, \epsilon)) \longrightarrow \mathbb{B}(0, \epsilon)$$

qui forme une famille de revêtements étales finis lorsque ϵ varie. On va voir que les composantes connexes géométriques sont des boules et que si $f^{-1}(\mathbb{B}(0, \epsilon))^0$ désigne la composante connexe neutre de 0 alors

$$f^{-1}(\mathbb{B}(0, \epsilon))^0 = \mathbb{B}(0, \psi(\epsilon)) \xrightarrow{f} \mathbb{B}(0, \epsilon)$$

où ψ , une fonction de Herbrand, est une fonction convexe affine par morceaux qui se calcule en termes du polygone de Newton de f .

Cela définit une filtration sur les racines de f via

$$\epsilon \longmapsto f^{-1}(\{0\}) \cap f^{-1}(\mathbb{B}(0, \epsilon))^0$$

qui lorsque $G = \text{Spec}(\mathcal{O}_K[T]/(f(T)))$ est un schéma en groupes fini localement libre de section unité donnée par $T = 0$ forme une filtration par des sous-groupes étales de G_η . Un théorème de fibration de Abbes et Saito montre plus généralement que cette filtration peut être définie indépendamment d'une présentation (i.e. dans le cas monogène le choix d'un polynôme f) pour des algèbres syntomiques finies. Nous explicitons donc cette filtration dans le cas particulier très simple des algèbres monogènes.

B.1. Composantes connexes géométriques de $\{x \mid v(f(x)) \geq \epsilon\}$. —

Définition B.1. — Notons pour tout $\epsilon \in v(\overline{K}^\times)_{\geq 0}$ $Y^\epsilon = \{x \in \mathbb{B}^1(\overline{K}) \mid v(f(x)) \geq \epsilon\}$ comme espace rigide sur K (un ouvert affinoïde dans la boule unité).

Si $\mathbb{B}(0, \epsilon) = \{x \mid v(x) \geq \epsilon\}$ on a donc en termes d'espaces rigides $Y^\epsilon = f^{-1}(\mathbb{B}(0, \epsilon))$ où $f : \mathbb{B}^1 \longrightarrow \mathbb{B}^1$.

Définition B.2. — Soit $\mathcal{R}_{0,\epsilon}$ la relation d'équivalence sur I définie par $\forall i, j \in I \ i \sim_{\mathcal{R}_{0,\epsilon}} j$. Définissons par récurrence sur k la relation d'équivalence $\mathcal{R}_{k,\epsilon}$ sur I de la façon suivante : $\mathcal{R}_{k,\epsilon}$ est plus fine que $\mathcal{R}_{k-1,\epsilon}$ définie par

$$\forall i, j \in I \ i \sim_{\mathcal{R}_{k,\epsilon}} j \text{ si } i \sim_{\mathcal{R}_{k-1,\epsilon}} j \text{ et } v(\alpha_i - \alpha_j) \geq \frac{1}{\text{Card}[i]_{\mathcal{R}_{k-1,\epsilon}}} \left(\epsilon - \sum_{\substack{j' \sim_{\mathcal{R}_{k-1,\epsilon}} j}} v(\alpha_{j'} - \alpha_j) \right)$$

où $[i]_{\mathcal{R}_{k-1,\epsilon}}$ désigne la classe d'équivalence de i pour la relation $\mathcal{R}_{k-1,\epsilon}$. On note $\mathcal{R}_{\infty,\epsilon} = \mathcal{R}_{k,\epsilon}$ pour $k \gg 0$ la relation d'équivalence limite sur I .

Lemme B.3. — Notons pour tout $r \in v(\overline{K}^\times)$ et $\alpha \in \overline{K}$ $\mathbb{B}(\alpha, r) = \{x \mid v(x - \alpha) \geq r\}$ comme espace rigide sur $\widehat{\overline{K}}$. Les composantes connexes géométriques de Y^ϵ sont des boules

$$Y^\epsilon \otimes_K \widehat{\overline{K}} = \coprod_{[i] \in I/\mathcal{R}_{\infty,\epsilon}} \mathbb{B} \left(\alpha_i, \frac{1}{[i]_{\mathcal{R}_{\infty,\epsilon}}} \left(\epsilon - \sum_{\substack{j \sim_{\mathcal{R}_{\infty,\epsilon}} i}} v(\alpha_i - \alpha_j) \right) \right)$$

Remarque B.4. — Bien sûr dans le lemme précédent il est inutile d'aller jusqu'à $\widehat{\overline{K}^\times}$. Il suffit d'étendre les scalaires à n'importe quelle extension de K contenant toutes les racines de f .

La démonstration du lemme précédent repose elle même sur le lemme suivant appliqué de façon récurrente.

Lemme B.5. — Soit J un ensemble fini, $(\beta_j)_{j \in J} \in \overline{K}^J$ et $\eta \in v(\overline{K})_{\geq 0}$. Définissons la relation d'équivalence suivante sur $J : j_1 \sim j_2$ si $v(\beta_{j_1} - \beta_{j_2}) \geq \frac{\eta}{|J|}$. Alors

$$\{x \in \overline{K} \mid \sum_{j \in J} v(x - \beta_j) \geq \eta\} = \coprod_{[j] \in J/\sim} \{x \in \overline{K} \mid \sum_{j' \sim j} v(x - \beta_{j'}) \geq \eta - \sum_{j' \sim j} v(\beta_j - \beta_{j'})\}$$

Si $\forall j_1, j_2 \in J \ j_1 \sim j_2$ alors

$$\forall j_0 \in J \ \{x \in \overline{K} \mid \sum_{j \in J} v(x - \beta_j) \geq \eta\} = \{x \in \overline{K} \mid v(x - \beta_{j_0}) \geq \frac{\eta}{|J|}\}$$

B.2. Dualité convexe et polygone de Newton. —

Définition B.6. — Soit $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonction convexe semi-continue inférieurement. Posons

$$\psi^*(s) = \sup\{t \mid \psi(\bullet) \geq -s \bullet + t\}$$

La fonction ψ se déduit de ψ^* par

$$\psi(t) = \sup\{-xt + \psi^*(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

(le graphe de ψ est une “enveloppe” de droites). On écrit cela sous la forme $\psi = \psi^{**}$.

Définition B.7. — Notons $\text{Newt} : [0, \deg f] \longrightarrow [0, +\infty]$ le polygone de Newton de f . Il s’agit d’une fonction convexe linéaire par morceaux. Si $f = \sum_k a_k T^k$ son graphe est l’enveloppe convexe des $(k, v(a_k))_k$. Ses pentes sont les opposés des valuations des racines de f (comptées avec multiplicité).

Lemme B.8. —

$$\text{Newt}^*(s) = \underbrace{\inf\{v(f(x)) \mid x \in \overline{K} \text{ } v(x) \geq s\}}_{\text{un intervalle de } v(\overline{K})}$$

Démonstration. On vérifie facilement que

$$\inf\{v(f(x)) \mid x \in \overline{K} \text{ } v(x) \geq s\} = \sum_{i \in I} \inf\{s, v(\alpha_i)\}$$

□

On a donc en termes de géométrie rigide

$$f(\mathbb{B}(0, s)) = \mathbb{B}(0, \text{Newt}^*(s))$$

B.3. Fonction de Herbrand. — Supposons que $f(0) = 0$.

Définition B.9. — Soit X^ϵ la composante connexe géométrique de 0 dans $Y^\epsilon = f^{-1}(\mathbb{B}(0, \epsilon))$.

Proposition B.10. — Si l’on pose $\eta(\bullet) = \text{Newt}^*(\bullet)$ et $\psi = \eta^{-1}$ on a les égalités

$$X^{\eta(\epsilon)} = \mathbb{B}(0, \epsilon) \text{ et } X^\epsilon = \mathbb{B}(0, \psi(\epsilon))$$

Démonstration. On vérifie aisément que la fonction $\eta : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ est strictement croissante et que donc ψ est bien définie. La seconde égalité résulte de la première. On a d’après le lemme précédent

$$X^{\eta(\epsilon)} = f^{-1}(f(\mathbb{B}(0, \epsilon)))^0$$

où $(-)^0$ désigne la composante connexe de $0 \in \mathbb{B}^1$. Bien sûr $\mathbb{B}(0, \epsilon) \subset f^{-1}(f(\mathbb{B}(0, \epsilon)))$ et donc $\mathbb{B}(0, \epsilon) \subset f^{-1}(f(\mathbb{B}(0, \epsilon)))^0$. De plus on sait qu’il existe $\epsilon' > 0$ tel que $f^{-1}(f(\mathbb{B}(0, \epsilon)))^0 = \mathbb{B}(0, \epsilon')$ avec nécessairement $\epsilon' \geq \epsilon$. Mais $f(\mathbb{B}(0, \epsilon')) = \mathbb{B}(0, \eta(\epsilon'))$ or si $\epsilon' > \epsilon$ $\eta(\epsilon') > \eta(\epsilon)$. Donc $\epsilon' = \epsilon$. □

La fonction η se calcule de façon usuelle par une intégrale :

Lemme B.11. —

$$\eta(s) = \int_0^s \text{Card}(f^{-1}(0) \cap \mathbb{B}(0, s)) ds$$

Lemme B.12. — Soient f et g deux polynômes comme précédemment. Alors

$$\text{Newt}_{f \circ g}^* = \text{Newt}_f^* \circ (\text{Newt}_g^*)$$

En particulier Newt_f et Newt_g déterminent complètement $\text{Newt}_{f \circ g}$. La fonction η associée à $f \circ g$ est la composée de celle associée à f avec celle associée à g .

Démonstration. On a

$$(f \circ g)(\mathbb{B}(0, \epsilon)) = f(\mathbb{B}(0, \text{Newt}_g^*(\epsilon))) = \mathbb{B}(0, \text{Newt}_f^*(\text{Newt}_g^*(\epsilon)))$$

qui est égal à $\mathbb{B}(0, \text{Newt}_{f \circ g}^*(\epsilon))$.

□

B.4. La filtration de ramification des schémas en groupes monogènes. — Soit $G = \text{Spec}(\mathcal{O}_K[T]/(f))$ où $f(T) = T \prod_i (T - \alpha_i)$ un schéma en groupe fini localement libre sur \mathcal{O}_K dont l'algèbre est monogène.

Remarque B.13. — Soit H un groupe formel p -divisible sur \mathcal{O}_K et $G \subset H$ un sous-groupe fini localement libre. Alors l'algèbre de G est monogène. En effet, après un bon choix de coordonnées formelles T à la source et au but l'isogénie de groupes formels $H \rightarrow H/G$ s'écrit $T \mapsto f(T)$ pour un polynôme unitaire f .

Définition B.14. — On pose $G_a = \{\alpha_i \mid v(\alpha_i) \geq a\}$ vu comme sous-groupe étale de G_η . On note également $G_a = \text{Spec}(\mathcal{O}_K[T]/(T \prod_{i, v(\alpha_i) \geq a} (T - \alpha_i)))$ son adhérence schématique dans G . On pose $G^a = G_{\psi(a)}$ où ψ est la fonction de Herbrand associée à f .

D'après la proposition B.10 le groupe G^a est celui défini par Abbes et Saito, et étudié par Abbes-Mokrane ([1]).

Proposition B.15. — Soit $\varphi : H_1 \rightarrow H_2$ une isogénie de groupes formels p -divisibles de dimension 1 sur \mathcal{O}_K . Soit $G \subset H_1$ plat fini et $\varphi(G)$ l'adhérence schématique de $\varphi(G_\eta)$. Alors

$$\forall a \quad \varphi(G^a) = \varphi(G)^a$$

Démonstration. Posons $G = \text{Spec}(\mathcal{O}_K[T]/(f \circ g))$, $\varphi(G) = \text{Spec}(\mathcal{O}_K[T]/(f))$ et $\varphi : G \rightarrow \varphi(G)$ donné au niveau des algèbres par $T \mapsto g(T)$. Alors, G^a est la composante connexe de 0 dans $U = \{y \in \mathbb{B}^1(\overline{K}) \mid v(f \circ g(y)) \geq a\}$ et $\varphi(G)^a$ la composante connexe de 0 dans $V = \{y \in \mathbb{B}^1(\overline{K}) \mid v(f(y)) \geq a\}$. Il est clair que $\varphi(V) \subset U$. De plus l'image par φ de la composante connexe contenant 0 de V est encore connexe, contient zéro, et donc est contenue dans $\varphi(G)^a$. Donc $\varphi(G^a) \subset \varphi(G)^a$. Pour l'autre inclusion il suffit de voir qu'étant donné que φ induit un morphisme étale fini d'espaces rigides le morphisme $\varphi|_V : V \rightarrow U$ est étale fini et qu'il l'est donc encore en restriction à chacune des composantes connexes. Or un morphisme étale fini entre espaces rigides connexes est surjectif. \square

Les groupes de ramifications supérieures se comportent donc bien par isogénies, mais sont moins concrets que ceux de ramification inférieure. Certains des calculs de cet article se ramènent donc en fait à jouer sur les deux plans en passant de la ramification inférieure à la ramification supérieure.

Références

- [1] A. Abbes and A. Mokrane. Sous-groupes canoniques et cycles évanescents p -adiques pour les variétés abéliennes. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 99, 2004.
- [2] F. Bruhat and J. Tits. Groupes réductifs sur un corps local. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 41 :5–251, 1972.
- [3] P. Deligne and D. Husemöller. Survey of Drinfeld modules. In *Current trends in arithmetical algebraic geometry (Arcata, Calif., 1985)*, volume 67 of *Contemp. Math.*, pages 25–91.
- [4] G. Faltings. Group schemes with strict \mathcal{O} -action. *Mosc. Math. J.*, 2(2) :249–279, 2002.
- [5] L. Fargues. L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld : décomposition cellulaire de la tour de Lubin-Tate. *preprint*.
- [6] L. Fargues. L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld : démonstration du résultat principal. *preprint*.
- [7] L. Fargues. L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld au niveau des points. *preprint*.
- [8] M. J. Hopkins and B. H. Gross. Equivariant vector bundles on the Lubin-Tate moduli space. In *Topology and representation theory (Evanston, IL, 1992)*, volume 158 of *Contemp. Math.*, pages 23–88. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [9] M. Raynaud. Schémas en groupes de type (p, \dots, p) . *Bull. Soc. Math. France*, 102 :241–280, 1974.
- [10] J.P. Serre. *Corps locaux (troisième édition)*. Hermann.
- [11] J. Tate and F. Oort. Group schemes of prime order. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 4(3) :1–21, 1970.

- [12] Jiu-Kang Yu. On the moduli of quasi-canonical liftings. *Compositio Math.*, 96(3) :293–321, 1995.

LAURENT FARGUES, CNRS-IHES-université Paris-Sud Orsay • *E-mail* : `laurent.fargues@math.u-psud.fr`